UNIVERSITY OF ALBERTA LIBRARY
0 1620 0337 8757

$26.30 192
IXS30002

MATHÉMATIQUES 30/33

Secondaire deuxième cycle

GUIDE D'ENSEIGNEMENT
(Édition provisoire - 1992)

LANGUAGE SERVICES
Alberta EDUCATION

MATHÉMATIQUES 30/33

Secondaire deuxième cycle

GUIDE D'ENSEIGNEMENT
(Édition provisoire)

Alberta
Education
1992

Dépôt légal - Troisième trimestre 1992
Bibliothèque nationale du Canada

DONNÉES DE CATALOGAGE AVANT PUBLICATION (ALBERTA EDUCATION)

Alberta. Alberta Education. Language Services.
Mathématiques 30/33 : secondaire deuxième cycle : guide d'enseignement.

ISBN 0-7732-0789-9

1. Mathématiques -- Étude et enseignement (secondaire) -- Alberta. I. Titre.

QA43.A333 1992 510.7

Pour éviter d'alourdir le texte, nous nous conformons dans le présent document à la règle de grammaire qui permet d'utiliser le masculin avec une valeur de neutre lorsqu'on parle en général. Par exemple, il est clair que lorsqu'on utilise les mots «enseignant» et «élève», ces masculins incluent un enseignant et un élève de l'un ou de l'autre sexe.

© 1992, la Couronne du chef de la province de l'Alberta, représentée par le ministre de l'Éducation. Alberta Education, Language Services Branch, 11160, avenue Jasper, Edmonton, Alberta, T5K 0L2. Tous droits réservés. Des exemplaires sont disponibles au Learning Resources Distribution Centre, 12360, 142e Rue, Edmonton, Alberta, T5L 4X9.

REMERCIEMENTS

Alberta Education tient à exprimer sa reconnaissance aux personnes et groupes qui ont contribué à l'élaboration et à la production de ce guide d'enseignement.

Bob Berglind	Chef de département, Ernest Manning High School, Calgary
Linda Brost	Chef de département, Sir Winston Churchill High School, Calgary
Paul Downes	Enseignant, Ernest Manning High School, Calgary
Bob Michie	Superviseur de mathématiques, Calgary Board of Education
Jim Neilsen	Chef de département, Crescent Heights High School, Calgary
Rick Sept	Enseignant, Crescent Heights High School, Calgary
Pat Sill	Enseignant, Adult Academic Program, Calgary
Judy Steiert	Enseignante, Sir Winston Churchill High School, Calgary
Roger Teshima	Chef de département, Henry Wisewood High School, Calgary
Enzo Timoteo	Conseiller en mathématiques, Alberta Education
Frank Visser	Chef de département, James Fowler High School, Calgary

VERSION FRANÇAISE - LANGUAGE SERVICES BRANCH

Traduction, édition et production	Guérin éditeur ltée Montréal
Responsable de projet	Ghislaine Lavergne Language Services Branch
Réviseur pédagogique	Henri Breault Edmonton

Digitized by the Internet Archive
in 2016

https://archive.org/details/mathematiques30300albe

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements iii
But 1
Raison d'être et philosophie du programme 1
Objectifs généraux 2
Objectifs spécifiques 5
Planification de l'enseignement 8
Évaluation de l'élève 11
L'écrit en mathématiques 18
Séquence des cours 18
Matériel didactique 23
Comment utiliser le guide d'enseignement 25

MATHÉMATIQUES 30

Degrés d'importance des composantes du programme 29
Attitudes 30
Résolution de problèmes 30
Fonctions polynomiales 33
Fonctions trigonométriques et circulaires 49
Statistiques 69
Relations quadratiques 85
Fonctions exponentielles et logarithmiques 119
Permutations et combinaisons 135
Suites et séries 151
Feuille de données graphiques 167
Échantillon de programmes graphiques pour calculatrice et ordinateur 168
Échantillons de papier graphique 176

MATHÉMATIQUES 33

Degrés d'importance des composantes du programme 185
Attitudes 186
Résolution de problèmes 186
Radicaux et exposants 189
Rentes, prêts hypothécaires et prêts bancaires 195
Statistiques 205
Trigonométrie 219
Polynômes et expressions rationnelles 237
Fonctions et relations 247
Fonctions et équations quadratiques 267

ANNEXES

Annexe A 283
Exemples de quadrillés pour binomiaux 285
Exemples de tuiles algébriques 286
Annexe B 287
Exemples de suggestion d'évaluation 289
Annexe C 295
Emploi de l'écrit dans l'apprentissage des mathématiques 297
Écriture exploratoire et apprentissage des mathématiques 305
Annexe D 315
Lignes directrices pour une intégration efficace des ressources 317
Centres de ressources 317
(A) centres de ressources régionaux 317
(B) centres de ressources en région urbaine 319
Annexe E 321
Alberta Consumer and Corporate Affairs 323
Annexe F 325
Consultants en mathématiques pour Alberta Education 327

BUT

Ce guide d'enseignement est conçu afin d'aider les enseignants à mettre en pratique les cours de mathématiques 30 et 33. Le guide d'enseignement est un outil qui fournit des informations utiles aux enseignants. Les stratégies d'enseignement présentées ne constituent que des suggestions et ne sont donc pas obligatoires. Le programme d'études des cours Mathématiques 30 et 33 indique la matière obligatoire que l'enseignant doit couvrir. Un aperçu des cours du programme de Mathématiques 30 et 33 est donné au début de chaque section dans le guide d'enseignement. L'aperçu comprend les objectifs spécifiques d'apprentissage, les objectifs reliés aux attitudes et les objectifs reliés à la résolution de problèmes pour chaque cours.

Les principales sections de chaque programme d'études, énoncées au début de chaque document, sont les suivantes : raison d'être et philosophie du programme, objectifs généraux et objectifs spécifiques.

Le guide d'enseignement des cours Mathématiques 30 et 33 est conçu dans le but d'aider les enseignants à mettre en pratique en classe le programme d'études pour les mathématiques au secondaire deuxième cycle.

RAISON D'ÊTRE ET PHILOSOPHIE DU PROGRAMME

Afin de se fixer des objectifs et de faire des choix informés, les élèves doivent posséder de nombreuses habiletés dans les domaines de la réflexion et de la résolution de problèmes. Les principes essentiels sont, tout d'abord, une compréhension des techniques mathématiques et des processus qui leur permettront de mettre en application les habiletés de base nécessaires pour résoudre des situations mathématiques quotidiennes, et qui leur permettront également d'acquérir des meilleures habiletés en ce qui concerne l'analyse logique et l'utilisation de méthodes permettant de tirer des conclusions.

La connaissance des mathématiques est essentielle à toute personne bien éduquée. Toutefois, l'utilisation des mathématiques dans la vie d'une personne est en train de changer. L'importance autrefois accordée à la mémorisation de formules mathématiques et aux algorithmes est maintenant axée sur une politique plus dynamique des mathématiques, considérées comme un langage précis, que l'on utilise pour raisonner, interpréter et explorer. Il existe toujours un besoin pour le développement logique de concepts faisant office de base pour une utilisation appropriée de l'information mathématique dans le but de résoudre des problèmes. Toutefois, l'utilisation de la technologie disponible, de pair avec des techniques comme l'estimation et la simulation, ajoutées aux techniques de résolution de problèmes plus traditionnelles, sont des outils avec lesquels on peut résoudre des problèmes mathématiques.

Le changement qui s'opère dans l'utilisation des mathématiques nécessite des changements concomitants du programme de mathématiques. Les élèves auront besoin de connaître un grand nombre de concepts, mais devront également comprendre par quelles idées ces concepts sont formés et de quelle façon ils sont reliés. Ils devront également apprendre à connaître leurs applications. Fait encore plus important, les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes en utilisant les processus mathématiques développés et devront avoir confiance en leur capacité de mettre en application les habiletés et les concepts mathématiques acquis, afin de pouvoir acquérir de nouvelles connaissances. De plus, la capacité que recèle la technologie d'effectuer rapidement et de façon précise les calculs et les manipulations, de développer une

compréhension conceptuelle et de faciliter un meilleur ordre de pensée, devrait être prise en considération et utilisée par les élèves.

La majeure partie des élèves qui débutent leur cours de niveau secondaire démontrent surtout des comportements opérationnels concrets en ce qui a trait aux mathématiques. Il est reconnu que le cours de mathématiques de niveau secondaire comporte de nombreuses notions abstraites que les élèves devront être en mesure d'acquérir. Le contenu du programme pour le cours de mathématiques de niveau secondaire est approprié aux élèves du point de vue de l'apprentissage et devrait être présenté en tenant compte de la capacité de compréhension des élèves.

Le programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle comporte trois séquences de cours qui sont : Mathématiques 14 et 24; 13, 23 et 33 et 10, 20 et 30. Il est possible pour les élèves d'être transféré dans un cours d'une autre séquence. Ces séquences de cours correspondent à des aptitudes, aspirations et intérêts différents et sont conçus pour permettre aux élèves de réussir en mathématiques. Le programme de mathématiques reflète également le changement des besoins de la société et donne aux élèves des concepts mathématiques, des habiletés et des attitudes qui seront nécessaires pour faire face aux défis du futur.

OBJECTIFS GÉNÉRAUX

Lorsque les élèves auront terminé leurs cours de mathématiques du secondaire deuxième cycle, on s'attend à ce qu'ils soient compétents en mathématiques. On entend par mathématiquement compétents, la capacité et la volonté que possèdent les élèves à répondre aux demandes de leur monde en utilisant des concepts et des processus mathématiques pour communiquer, raisonner et résoudre des problèmes. De façon plus spécifique, les élèves devront :

- avoir acquis une compréhension des concepts mathématiques de base et avoir développé les habiletés et les attitudes nécessaires pour devenir un membre actif et responsable de la société;

- mettre en application les habiletés et les concepts mathématiques dans des situations réelles;

- avoir développé les habiletés, les concepts et les attitudes qui leur permettront de réussir dans diverses situations mathématiques qu'ils rencontreront dans leurs futures études, dans leurs emplois et dans la vie de tous les jours;

- avoir développé des habiletés, des concepts et des attitudes qui leur permettront d'acquérir des connaissances mathématiques au-delà du niveau d'études secondaires;

- avoir développé un esprit critique et créatif;

- communiquer efficacement des idées mathématiques;

- comprendre de quelle façon les mathématiques peuvent être utilisées pour examiner, interpréter et prendre des décisions dans les affaires humaines;

- comprendre comment les mathématiques peuvent être utilisées dans l'analyse de phénomènes naturels;

- comprendre les rapports et l'interaction entre les différents concepts mathématiques et entre les mathématiques et les autres disciplines;

- comprendre et apprécier la contribution positive que les mathématiques, en tant que science et en tant qu'art, ont apportée à la civilisation et la culture.

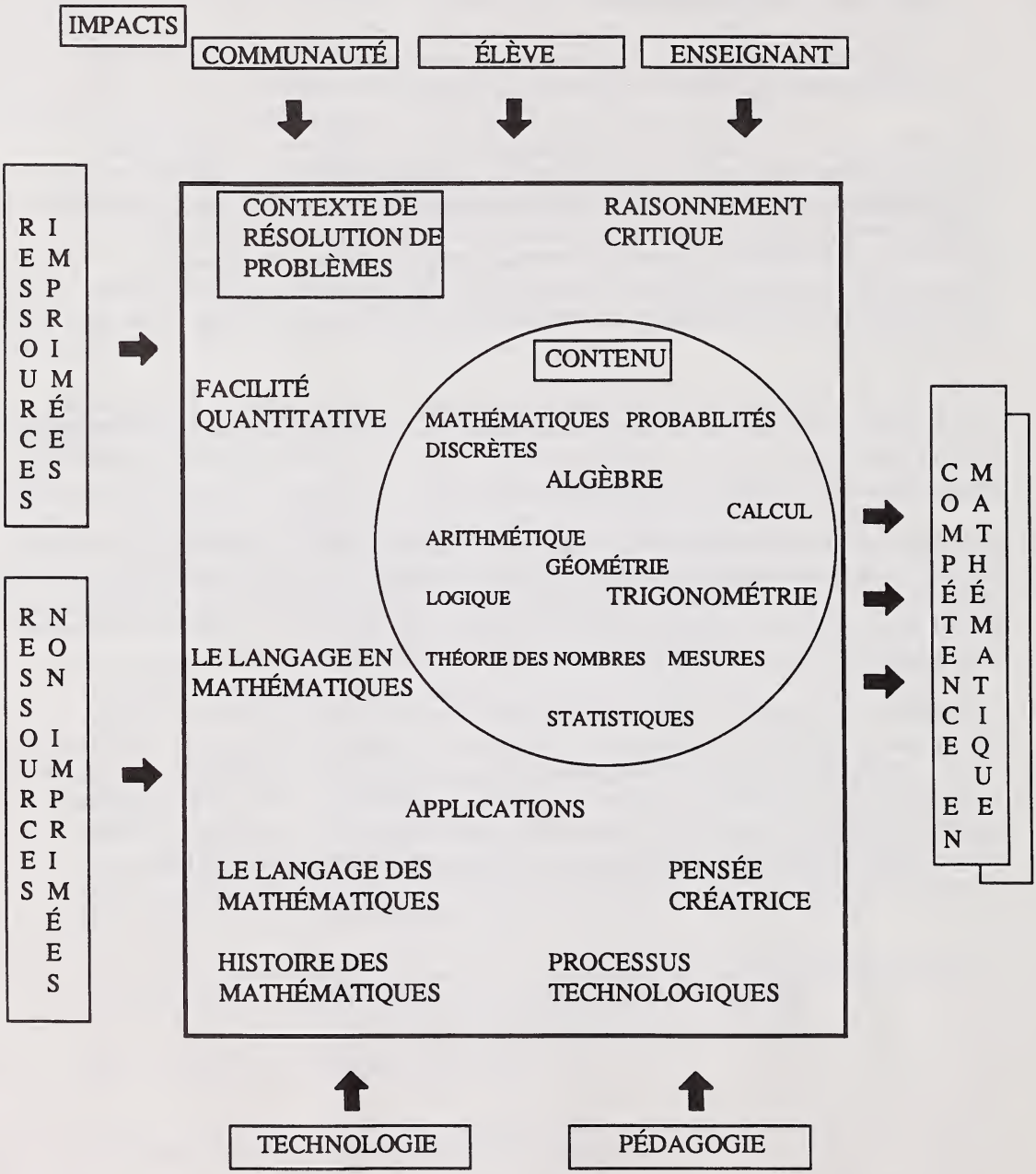
Un modèle général de **compétence en mathématiques** pour les programmes de secondaire deuxième cycle est présenté à la page suivante. Il fait ressortir les facteurs qui influencent l'apprentissage des élèves au fur et à mesure qu'ils deviennent mathématiquement compétents. Le modèle est souple puisque le contenu peut être assimilé dans un contexte de résolution de problèmes qui fait intervenir de nombreux véhicules comme point de convergence de l'apprentissage. Les élèves participant en même temps à des situations d'apprentissage sont influencés, dans ce qu'ils apprennent et dans la façon dont ils apprennent, par des forces qui ont un impact sur eux.

Le **contenu** du programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle est l'ensemble des connaissances qui devront être acquises par les élèves. Dans les différents cours de mathématiques du secondaire deuxième cycle, le contenu est élaboré à partir de sujets qui peuvent être placés par catégories dans un ou plusieurs des sections énumérées.

Dans chacun des cours du programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle, l'accent sera mis sur la résolution de problèmes. Le **contexte de résolution de problèmes** renvoie aux thèmes directeurs grâce auxquels les objectifs spécifiques pourront être atteints. Les diverses entrées présentées dans le modèle suggèrent un processus qui appartient au contexte de résolution de problèmes, et peuvent ainsi être utilisées comme véhicule d'apprentissage.

Les **effets** sur le contexte de résolution de problèmes sont les habiletés, les attitudes et les expériences que possèdent les élèves et les enseignants concernés, de même que les ressources qui pourront être utilisées lors du processus d'apprentissage. Ils comprennent l'influence exercée par la culture et les croyances de la communauté, telles que reflétées par l'école. L'efficacité que possède le contexte à aider l'élève à acquérir le contenu dépend de la capacité que possède l'enseignant à trouver des éléments ayant une influence sur l'apprentissage d'un élève.

Modèle général de compétence en mathématiques pour les programmes du secondaire deuxième cycle



OBJECTIFS SPÉCIFIQUES

Organisation du programme

La majeure partie de chaque cours de mathématiques au niveau secondaire deuxième cycle comporte des thèmes que tous les élèves qui suivent ce cours doivent acquérir. La matière obligatoire comprend 80 % du cours et contient les concepts, les habiletés et les attitudes que tous les élèves doivent acquérir. La partie obligatoire de tous les cours énonce clairement les attentes spécifiques par rapport à la résolution de problèmes et à l'utilisation de la technologie.

Chaque cours comprend également une partie obligatoire qui constitue 20 % du contenu total et qui est composée de **matière facultative** compatible avec le contenu et les exigences de la partie obligatoire. La raison d'être de cette matière facultative est de fournir des notions théoriques ou des activités expérimentales de renforcement, de rattrapage ou d'innovation. Il ne s'agit pas de fournir aux élèves une accélération ni des équivalences de cours. Toutefois, le renforcement et le prolongement à l'horizontale sont appropriés et les élèves devraient avoir accès à du matériel facultatif qui répond à leurs besoins et à leur intérêts.

Dans le programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle, l'évaluation des élèves comportera l'évaluation au niveau des connaissances de tous les objectifs, y compris les concepts, les habiletés et les attitudes, de même que la résolution de problèmes et les objectifs quant à l'utilisation de la technologie.

Structure du programme

Au début de chaque cours, on retrouve une liste des objectifs portant sur les attitudes. Ces attitudes incarnent chez l'élève une attitude ou tournure d'esprit mathématiques pour envisager le monde. Les objectifs portant sur les attitudes devraient être étroitement incorporés au tissu de tout le cours.

Viennent ensuite les objectifs quant à la résolution de problèmes qui exposent toute une variété de procédures, de stratégies, d'applications et de techniques de vérification servant à résoudre les problèmes. Comme le principal objectif de l'étude des mathématiques consiste à apprendre à résoudre des problèmes, les objectifs de résolution de problèmes seront présents dans tous les domaines des objectifs spécifiques. Les élèves doivent posséder le bagage de connaissances nécessaire pour parvenir à atteindre ces objectifs avec succès en utilisant les techniques de résolution de problèmes.

Les unités du cours sont divisées en concepts. Un concept est une notion générale ou abstraite d'exemples spécifiques qui possèdent des propriétés communes ou des relations identifiables entre elles. Les concepts sont présents sous formes de définitions mathématiques, de théorèmes ou d'énoncés de notions ou d'abstractions mathématiques. Dans les programmes d'études, les concepts sont introduits de cette façon « *Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent ...* ».

Pour renforcer chaque concept, on retrouve un certain nombre d'habiletés. Les habiletés sont des moyens intellectuels ou physiques qui seront développés dans le contexte du concept particulier. Dans le programme d'études, les habiletés sont énoncées de cette façon : « *Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit* ».

Les habiletés spécifiquement reliées à l'utilisation de la technologie identifient les sections dans lesquelles les élèves utilisent la calculatrice ou l'ordinateur comme outils leur permettant d'effectuer des calculs, des manipulations ou des représentations graphiques ou qui les aident à analyser les problèmes. Les objectifs de l'utilisation de la technologie sont définis de façon explicite tout au long des objectifs énoncés. Dans de nombreuses situations, une technologie particulière est indiquée pour une certaine recherche ou une analyse. C'est au cours de ces situations que l'utilisation de la technologie donne l'occasion aux élèves d'être critiques et créatifs dans leur raisonnement et dans la façon avec laquelle ils résolvent les problèmes.

Les élèves devront être en mesure d'apprendre comment et quand utiliser une calculatrice et devront démontrer une certaine aptitude pour l'estimation et le calcul mental. Pour utiliser la calculatrice de façon efficace, ils doivent être en mesure de juger le caractère valable d'une réponse et de comprendre l'importance d'émettre un jugement à propos du résultat d'un calcul.

Tout au long des objectifs, on retrouvera les mots vérifier et justifier. Dans le cadre du programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle, ces mots seront interprétés de la façon suivante :

- vérifier : déterminer la validité d'une opération, d'une solution, d'une formule ou d'un théorème à l'aide d'exemples qui peuvent être généralisés ou non;

- justifier : justifier la validité d'une opération, d'une solution, d'une formule ou d'un théorème en général et donner des arguments logiques pour chacune des étapes du processus.

Résolution de problèmes

Grâce à l'utilisation de problèmes et d'applications, les élèves seront en mesure de constater qu'il est nécessaire de comprendre certains concepts et d'acquérir une facilité avec certains processus mathématiques, de même qu'il sera nécessaire d'appliquer et de revoir certains concepts et processus enseignés précédemment. L'importance accordée à la résolution de problèmes dans les cours de mathématiques du niveau secondaire est passée de la recherche des réponses aux « problèmes énoncés » routiniers à l'application de concepts mathématiques, d'habiletés et de processus qui permettent de développer et de découvrir les mathématiques à l'aide d'une grande variété de situations de problèmes.

Dans chaque cours du programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle, on a intégré la résolution de problèmes qui est d'ailleurs mentionnée explicitement tout au long des objectifs énoncés dans le programme. De plus, les objectifs spécifiques pour la résolution de problèmes sont énoncés au début de chaque cours. Il n'est pas voulu que la résolution de problèmes soit présentée comme des unités d'études : toutefois, à la fin du cours, on s'attend à ce que l'élève ait acquis toutes les habiletés et tous les concepts énoncés dans le programme.

La résolution de problèmes est le point central du développement d'un concept, tout comme les exercices le sont pour une leçon. De la nouvelle matière devrait être présentée comme un problème à résoudre en utilisant les habiletés, les concepts et les processus acquis précédemment. Les enseignants devraient accepter facilement des stratégies non rigoureuses comme la modélisation, le travail à rebours et les simulations. Ils doivent accorder de l'importance au

processus utilisé et au raisonnement dans lequel l'élève s'est engagé, autant qu'à la réponse du problème. Les enseignants devraient se rappeler que ce qui sera considéré comme un problème pour certains élèves, sera vu comme une simple routine par d'autres et devraient être préparés à ce genre de situations afin de mieux adapter leurs présentations et leurs objectifs. Le point le plus important est que l'enseignant doit adopter un comportement modèle lors de la résolution de problèmes; les élèves considéreront que la résolution du problème est importante s'ils sont encouragés par leurs enseignants et par surcroît, s'ils les voient résoudre des problèmes.

Pour tous les niveaux de résolution de problèmes, on devrait enseigner aux élèves comment poser une question et comment analyser le processus de raisonnement qu'ils ont adopté pour traiter les problèmes. On devrait également leur donner l'occasion de le faire. Voici un exercice qui leur donne cette possibilité :

« Les enveloppes d'Albert »

Les élèves travaillent selon trois situations :

1. Un groupe de quatre élèves doit résoudre un problème. Chaque élève reçoit une seule partie de l'information du problème dans une enveloppe. Chaque élève doit expliquer cette partie d'information au groupe. Ce groupe doit :
   a) identifier le « problème »;
   b) planifier une solution;
   c) tenter de mettre le plan en application;
   d) analyser le « plan » et la méthode de solution.
2. Identique à la situation 1, mais avec deux élèves.
3. Les élèves résolvent le problème individuellement.

Au fur et à mesure que les élèves acquerront de l'expérience dans la résolution de problèmes, ils commenceront à utiliser des processus de résolution plus complexe. Ces processus comprennent la formulation et l'analyse d'hypothèses, la détermination de conclusions valides, l'utilisation de processus inductifs et déductifs, ainsi que le développement et l'utilisation d'algorithmes pour mettre en application une situation particulière.

Tout au long du programme d'études, des verbes comme « vérifiez » et « justifiez » seront utilisés. Ces objectifs suggèrent explicitement à l'enseignant qu'un élève devrait posséder les habiletés et les connaissances nécessaires pour réussir avec succès ces attentes en utilisant des techniques de résolution de problèmes. On encourage les enseignants à adhérer à l'esprit de ces objectifs en les traitant comme des problèmes à résoudre. Les élèves assimileront mieux les habiletés ou les concepts si on les encourage à les développer eux-mêmes.

Technologie

Les élèves devront être en mesure d'apprendre comment et quand utiliser une calculatrice et devront démontrer une certaine efficacité dans l'estimation et le calcul mental.

Pour utiliser efficacement une calculatrice, ils doivent être en mesure de juger du caractère valable d'une réponse et de comprendre l'importance d'émettre un jugement à propos du résultat d'un calcul.

Tout au long des objectifs énumérés dans le programme, les applications spécifiques pour la calculatrice et l'ordinateur sont identifiées. Elles définissent explicitement les sections où l'on s'attend à ce que les élèves utilisent la technologie dans leur apprentissage des mathématiques. Plusieurs de ces attentes indiquent qu'un moyen technologique particulier devrait être utilisé pour une certaine recherche ou analyse. C'est au cours de ces situations que l'utilisation de la technologie donne l'occasion aux élèves d'être critiques et créatifs dans leur raisonnement et dans la façon avec laquelle ils résolvent les problèmes.

L'intégration de la calculatrice dans tous les cours du programme de mathématiques de niveau secondaire, pour renforcer l'enseignement, le travail fait en classe et à la maison, de même que pour les évaluations, est essentielle. En utilisant la calculatrice de façon adéquate, le temps auparavant consacré aux calculs peut être utilisé pour la résolution de problèmes.

On devrait accroître l'utilisation de l'ordinateur dans les cours de mathématiques. L'enseignement effectué à l'aide de l'ordinateur permet de présenter les concepts visuellement par l'entremise de graphiques pouvant être manipulés par l'enseignant selon les données indiquées par les élèves. On devrait enseigner aux élèves la façon d'utiliser des logiciels et des programmes simples qui sont écrits pour des applications particulières, d'utiliser la puissance des ordinateurs pour créer des graphiques, organiser, analyser et présenter des données, pour simuler des situations réelles, pour créer et utiliser les algorithmes, de même que pour effectuer des manipulations et des calculs symboliques.

La technologie électronique continuera de jouer un rôle important dans l'enseignement des mathématiques, tant en ce qui concerne la matière enseignée que la façon avec laquelle celle-ci est enseignée. Les enseignants doivent encourager les élèves à utiliser la technologie disponible autant que possible et le mieux possible. Ils doivent adapter leurs techniques d'enseignement et leurs critères d'évaluation afin de refléter ce nouveau type d'enseignement.

PLANIFICATION DE L'ENSEIGNEMENT

Lorsque l'enseignant planifie son cours, il doit commencer par la fin, c'est-à-dire en identifiant ce que les élèves doivent connaître, ce qu'ils doivent être en mesure de faire et ce qu'ils ressentiront une fois l'enseignement dispensé. La planification comprend la spécification du but que les élèves doivent atteindre et l'élaboration des moyens par lesquels l'enseignant pourra contribuer à aider les élèves à atteindre ce but. Les éléments de base de la planification sont :

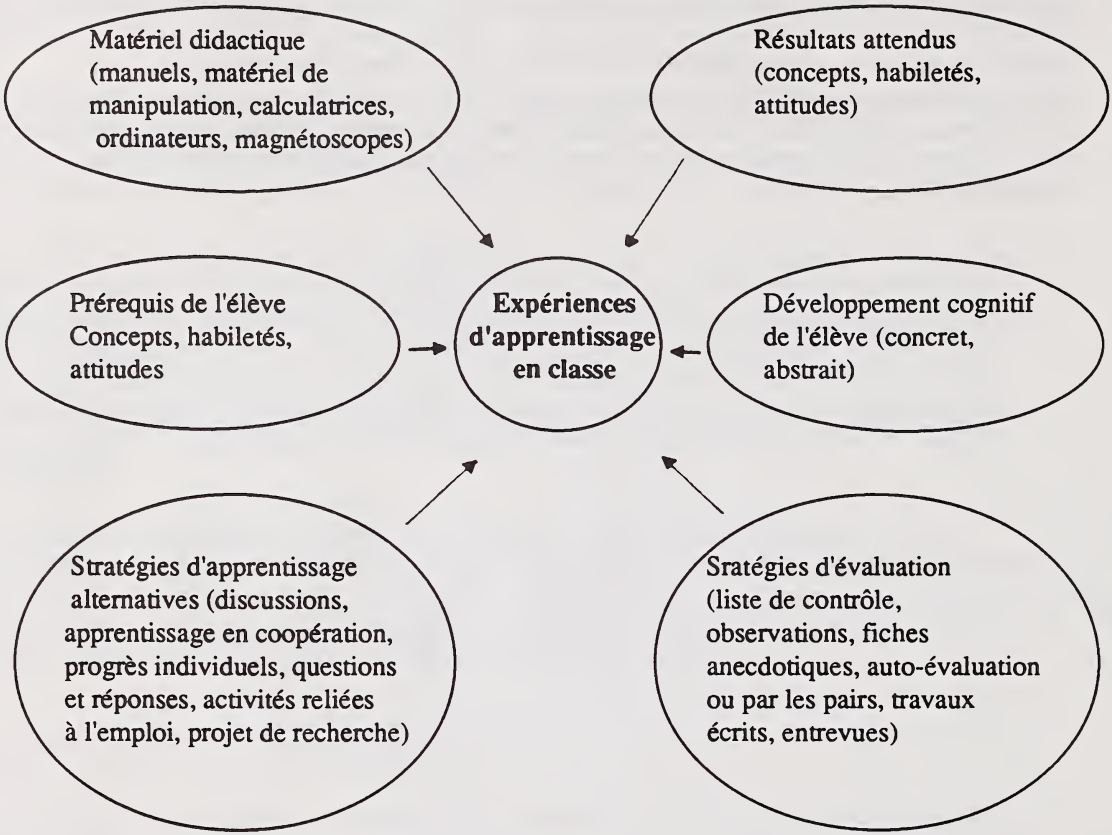
- identifier le but vers lequel les élèves se dirigent (objectifs généraux et spécifiques - concepts, applications et attitudes);
- identifier comment les élèves y parviendront (stratégies d'apprentissage);
- identifier comment vous, en tant qu'enseignant, et les élèves saurez quand les objectifs sont atteints (stratégies d'évaluation).

La planification est une approche systématique qui permet d'intégrer des expériences d'apprentissage pour arriver à atteindre les attentes quant aux concepts, aux habiletés et aux attitudes attendus. Toutefois, le plan d'enseignement n'est fourni qu'à titre de suggestion, et non comme une recette miracle. Il devrait être suffisamment flexible pour permettre à l'enseignant de pouvoir établir un rapport avec les habiletés de l'élève et pour prendre avantage de certaines

occasions d'apprentissage qui peuvent survenir au cours de l'enseignement. L'enseignant doit garder à l'esprit qu'il existe de nombreuses façons d'atteindre le même objectif et que les élèves n'ont pas tous besoin de la même stratégie d'enseignement.

Le plan d'enseignement comprend la matière à être enseignée au cours de l'année, pour chaque unité, ainsi que celle qui sera enseignée quotidiennement. Les éléments qui sont utilisés pour la planification de trois niveaux sont semblables, mais varient dans le nombre de détails. Les éléments à considérer, dans la détermination des expériences d'enseignement que les élèves recevront comprennent : ce que l'on attend de l'élève, l'endroit où l'élève se situe par rapport à ces attentes, les habiletés cognitives de l'élève, le matériel didactique de base et d'appui qui sera utilisé, les stratégies d'apprentissage alternatives et la façon avec laquelle ces enseignements seront évalués.

Éléments de la planification



Lorsque l'enseignant détermine l'ordre dans lequel seront présentés les unités d'apprentissage et les thèmes, il doit prendre en considération la façon avec laquelle ses élèves apprennent et comment sont organisées les ressources choisies. L'ordre de présentation des concepts, des applications et des attitudes dans le programme d'études ne reflète pas nécessairement la façon avec laquelle ceux-ci seront enseignés.

Le plan de l'ensemble du cours et des unités d'apprentissage doit être communiqué aux élèves, aux parents et aux administrateurs. Les plans de cours distribués aux élèves doivent préciser les critères d'évaluation afin de leur permettre de prendre note de leurs propres progrès et ainsi d'éviter toute mauvaise surprise au moment de la réception du bulletin.

Une amélioration de l'apprentissage a été remarquée lorsque les résultats attendus vont de pair avec les expériences d'apprentissage et les méthodes d'évaluation. Lorsque les élèves connaissent le but à atteindre et qu'ils peuvent constater la progression de leur cheminement, leur motivation à travailler est plus grande.

ÉVALUATION DE L'ÉLÈVE

Caractéristiques d'une évaluation efficace de l'apprentissage de l'élève de mathématiques

1. Il doit y avoir un lien étroit et clair entre les exigences, les expériences d'apprentissage en classe et les méthodes d'évaluation.

   - L'activité, le test ou le devoir doit évaluer la capacité que possède l'élève à réussir les exigences énoncées. Si l'activité n'évalue que le contenu global, par exemple, tandis que dans le cours l'importance est mise sur le développement des habiletés de l'élève à analyser, à interpréter et à mettre en application certains concepts, on obtiendra que très peu de renseignements sur la matière maîtrisée par rapport aux exigences. Des situations d'évaluation qui obligent les élèves à répondre à des questions isolées abordées dans les exigences spécifiques ne reflètent pas un programme de mathématiques qui consiste en une intégration des concepts mathématiques et des processus selon une structure courante et significative.

   - Lorsque les outils d'évaluation vont dans la même direction que le programme et l'enseignement dispensé en classe, un message très puissant et cohérent est transmis à l'élève. Ce qui est évalué et la façon avec laquelle l'évaluation est réalisée indiquent très clairement à l'élève ce qui est important dans le cours. Si les exigences énoncées mettent en relief la recherche d'un niveau de raisonnement plus élevé mais que l'évaluation accorde de l'importance sur un ensemble de faits, par exemple, et que l'enseignant fait une lecture de la matière, la plupart du temps les élèves ne sauront pas exactement ce qu'ils doivent apprendre, mais concluront sûrement que l'apprentissage de faits est ce qui est le plus important. Puisque les élèves doivent être en mesure d'utiliser la calculatrice, l'ordinateur et autre matériel de manipulation, ces situations d'évaluation doivent non seulement refléter l'utilisation de ces outils, mais les éléments du test doivent être appropriés pour l'utilisation du matériel disponible.

- L'apprentissage des mathématiques va plus loin que l'apprentissage de concepts, de processus et de leur application. Il comprend également le développement d'une disposition face aux mathématiques et permet de reconnaître les mathématiques comme un moyen puissant de regarder certaines situations. La disposition ne renvoie pas simplement à l'attitude, mais elle comprend également une tendance à penser et à agir de manière positive. La disposition mathématique des élèves est définie par la façon avec laquelle ils abordent leurs problèmes (avec confiance, en démontrant le désir d'explorer les autres possibilités, avec persévérance et intérêt) et par la tendance d'influencer leur propre façon de penser. C'est en observant les élèves pendant qu'ils tentent de résoudre des problèmes qu'on peut connaître les dispositions mathématiques des élèves.

- Il y a concordance en autant que l'évaluation reflète l'accent indiqué dans ;e programme d'études. Si une méthode d'évaluation, par exemple, comporte un grand nombre de questions où l'élève doit factoriser un trinôme et contient quelques questions de résolution de problèmes, cette méthode possède très peu de concordance avec un programme où l'accent est mis sur la résolution de problèmes et le raisonnement.

2. On doit utiliser des méthodes d'évaluation diversifiées afin de recueillir de l'information sur l'apprentissage de l'élève.

   - L'apprentissage est un processus complexe qui s'opère de diverses façons, à des niveaux différents. Dans les situations d'évaluation, on devrait retrouver différents raisonnements mathématiques, tout comme on devrait présenter les mêmes concepts ou procédés mathématiques dans différents contextes, sous différentes formes et avec des situations de problèmes diversifiées. Puisque les programmes d'études en mathématiques encourage un enseignement par la recherche, en mettant la résolution de problèmes en relief en tant que moyen par lequel les mathématiques seront apprises et mises en application, l'évaluation doit couvrir différents aspects d'un seul concept, utiliser des procédures dans des contextes diversifiés et doit demander aux élèves de démontrer qu'ils ont assimilé les connaissances.

   - Il n'existe aucune méthode d'évaluation qui, à elle seule, peut donner toute l'information dont l'enseignant a besoin pour faire le bilan de ce que les élèves ont appris et la façon avec laquelle ils apprennent. La qualité d'un jugement des connaissances acquises par rapport aux objectifs énoncés est liée à la cohérence des résultats provenant d'un nombre de sources différentes. Lorsqu'un élève démontre une performance semblable au cours de différentes méthodes d'évaluation, l'enseignant peut avoir confiance dans le jugement qu'il fera de cet élève.

3. L'évaluation de l'élève nécessite une planification particulière et le développement de critères d'évaluation appropriés.

   - L'évaluation fait partie de la planification; elle ne doit pas être prise en considération après l'enseignement de la matière. On devait inclure des méthodes d'évaluation tout au long de la planification et de l'enseignement de la matière.

L'évaluation fait partie intégrante du processus d'enseignement, elle ne doit donc pas en être séparée ou lui être ajoutée par la suite.

- Avant le début de l'enseignement d'une partie du programme (travail pour l'année, unité d'apprentissage ou travail quotidien), l'enseignant doit déterminer le niveau de connaissance maîtrisé par les élèves pour les concepts, les habiletés et les attitudes prérequis.

- Durant sa planification, l'enseignant doit déterminer ce qu'il considérera comme preuve que les objectifs énoncés dans l'unité on été atteints par les élèves. Une partie de cette planification consiste à déterminer le niveau standard de réussite que l'enseignant est prêt à accepter. (Reportez-vous à la section traitant sur les normes).

- En passant en revue les résultats d'une évaluation, l'enseignant pourrait alors décider de modifier ses stratégies d'enseignement.

- Un plan d'évaluation sur l'évolution des élèves à long terme devrait être élaboré et distribué aux élèves, aux parents et aux administrateurs au début de l'année scolaire. Ce plan devrait indiquer la façon avec laquelle le bulletin de l'élève et la note finale seront déterminés et comprendre une description des diverses composantes qui y seront présentées et l'importance relative de chacune de ces composantes.

4. L'évaluation des élèves devrait déterminer les diverses méthodes d'évaluation qui seront utilisées.

   - L'évaluation des performances de l'élève est utile dans bien des cas : elle permet d'identifier les niveaux de difficulté pour chaque élève, elle permet de recueillir des données qui serviront à la planification de l'enseignement, elle permet d'assigner des niveaux de réussite ou d'évaluer un programme. Le but de l'évaluation devrait déterminer les types de questions à poser, les méthodes à employer et l'utilisation faite à partir de l'information obtenue.

   - L'élève, l'enseignant, le directeur de l'école et le public en général désirent tous différents types d'informations, car ils désirent obtenir des réponses à des questions différentes. Les résultats provenant d'un test standardisé des connaissances mathématiques en général, par exemple, n'est pas nécessairement approprié pour mesurer l'efficacité d'un programme d'étude spécifique. Les tests de rendement standardisés servent à mesurer la position où se situe un élève, par rapport à une population, et ils doivent maximiser les différences qui existent parmi les élèves lorsque l'on mesure les éléments communs de leur apprentissage. De même que ces tests reflètent les connaissances générales d'un élève et ses connaissances acquises antérieurement, ils ne mesurent donc pas nécessairement le niveau d'apprentissage qu'il a atteint grâce à l'enseignement dispensé par l'enseignant.

5. L'évaluation doit être continue.

- Durant leur enseignement, les enseignants émettent continuellement des jugements à propos des progrès réalisés par les élèves. Comme les enseignants travaillent avec les élèves, ils prennent des décisions sur l'enseignement en se basant sur les informations fournies par les élèves. Lorsque les enseignants parlent, ils balaient les élèves d'un regard afin de voir s'ils ont saisi ses paroles, ils posent des questions afin de déterminer si les élèves ont compris la matière, ils écoutent parler les élèves afin de voir s'ils arrivent à verbaliser ce qu'ils étudient, ils regardent les élèves travailler ensemble sur un problème. Ces observations informelles permettent souvent de constater ce que pensent les élèves et peuvent fournir une importante source d'informations qui permettra de prendre des décisions par rapport à l'enseignement donné.

- Les différentes approches utilisées pour évaluer les performances des élèves doivent tenir compte de la croissance et du développement de chaque élève, afin que l'enseignant puisse déterminer un programme approprié et y apporter des changements lorsque nécessaire.

- La richesse des données recueillies lorsque diverses méthodes d'évaluation sont utilisées devrait permettre aux enseignants, avec le temps, d'émettre des jugements sur les progrès réalisés par les élèves et ils peuvent alors communiquer ces informations aux autres.

6. Les méthodes d'évaluation doivent être souples et permettre de fournir de l'information aux élèves et aux parents, de même qu'aux enseignants.

- L'évaluation doit être considérée comme une activité faisant partie de l'enseignement et non comme une charge additionnelle.

- Chaque période de cours est une occasion pour donner une forme d'évaluation formelle dont les résultats seront compilés. Cela ne signifie toutefois pas qu'il est nécessaire d'évaluer tous les élèves à chaque activité ou période de cours. Un système de rotation devrait être utilisé.

- Il est souhaitable d'utiliser des techniques d'évaluation (comme une liste d'observation, des entrevues) qui sont facilement et rapidement applicables pendant que les élèves s'affairent à leurs activités.

- Des registres détaillés et précis incluant des commentaires anecdotiques devraient être conservés de façon à s'avérer significatifs pour les élèves et les parents.

- On devrait encourager les élèves à se pencher sur leurs progrès personnels. Les activités d'évaluation devraient leur donner l'occasion d'en apprendre plus sur les mathématiques et sur eux-mêmes.

Normes d'évaluation

En éducation, les normes sont des énoncés qui communiquent de façon claire et concise le niveau de réussite à atteindre en fonction des objectifs spécifiques. Les normes déterminent à quel niveau les objectifs énoncés doivent être acquis pour qu'ils soient considérés comme une réussite ou à quel niveau les élèves doivent connaître le contenu du cours et quelles sont les habiletés qu'ils doivent posséder pour réussir ce cours. Les attentes énoncées mettent en relief ce que les élèves doivent apprendre. Les normes énoncées établissent jusqu'à quel niveau ces attentes doivent être acquises.

Il arrive souvent que les enseignants n'établissent pas consciencieusement les énoncés des normes, mais chaque enseignant se doit d'établir le degré de difficulté d'un test ou d'un travail, la quantité de travaux à faire à la maison qu'ils attendent des élèves, de même qu'établir ce qu'ils considèrent comme satisfaisant pour la classe et les travaux donnés. Pour établir ses normes, l'enseignant se fie à son expérience d'enseignement, sa formation, sur l'expérience des autres enseignants, sur le niveau des objectifs énoncés dans le matériel didactique de base et sur la réaction des élèves.

Afin d'être juste, chaque élève de la province qui réussit avec 50 % dans un cours de mathématiques de 11e année doit rencontrer les mêmes normes de réussite que tout autre élève qui a obtenu 50 % dans le cours. Fréquemment, la cohérence entre les classes et les écoles de la province provient de l'expérience commune qui existe entre les enseignants. Alberta Education a l'intention d'aider les enseignants à établir les normes en mathématiques. L'automne dernier, la Student Evaluation Branch a envoyé un exemple des énoncés des normes à suivre pour le cours de Mathématiques 30 dans le Mathematics and Sciences Bulletin 1989-1990 School Year. On s'attend à ce que les programmes d'études pour les cours de Mathématiques 30 et 33 contiennent des énoncés sur les normes à suivre.

Stratégies d'évaluation

ENTREVUE

Une entrevue planifiée avec un élève ou un groupe d'élèves constitue une technique efficace qui permet d'estimer le niveau de connaissances, de compréhension, la façon de pensée et l'attitude, de même que les habiletés de communication (verbales par rapport aux habiletés non verbales). Elle permet également de connaître les intérêts personnels de chacun. Une entrevue bien dirigée donne aux élèves l'occasion de constater ce qu'ils ont appris.

L'entrevue doit toujours avoir un but précis connu de l'enseignant et des élèves et doit être planifiée à l'avance. L'enseignant doit se

préparer à poser des questions supplémentaires qui guident la discussion, afin de juger de la compréhension ou des fausses conceptions.

Une entrevue avec un seul élève peut servir à évaluer cet élève, tandis que l'entrevue avec un petit groupe peut être utilisée pour juger de l'efficacité d'enseignement et pour renforcer les concepts et les techniques.

OBSERVATION

Les enseignants observent tout le temps. Lorsque les observations sont notées, elles deviennent alors une méthode d'évaluation plus efficace. Les observations documentées fournissent souvent les données de base qui permettent d'analyser et d'émettre un jugement, de même que contribuer à prendre les décisions en ce qui concerne le rattrapage ou l'enrichissement.

Contrairement à l'entrevue, l'observation est une stratégie d'évaluation passive. Les enseignants observent les élèves travailler et recherchent des comportements ou des résultats spécifiques. On peut noter ces observations à l'aide d'une liste de contrôle ou d'un relevé de faits anecdotiques. On pourra alors retrouver certains éléments, comme la compréhension de concepts ou de généralisation (lorsque les élèves utilisent certains outils de travail ou lors de discussions en groupe par exemple), l'enthousiasme, le désir de participer, l'échange d'idées, la persévérance et l'indépendance.

LISTE DE CONTRÔLE

Une liste de contrôle est une stratégie de documentation que l'on utilise en conjonction avec d'autres stratégies d'évaluation. Ces listes de contrôle peuvent être facilement créées et adaptées aux besoins de la situation. En règle générale, on établit une liste directrice indiquant les comportements ou les résultats désirés d'un côté et, de l'autre côté, une liste d'évaluation, les niveaux d'habiletés ou des commentaires d'évaluation. Lorsque l'enseignant aura à noter un type de comportement particulier, il n'aura qu'à identifier la colonne qui évalue ce comportement.

Les listes de contrôle se prêtent très bien à la documentation de certains éléments du programme comme la compréhension des concepts, l'utilisation des outils de travail, la maîtrise des connaissances, des habiletés ou des objectifs, les habitudes de travail, l'organisation des applications à effectuer, les stratégies de résolution de problèmes et applications à faire en groupe.

REGISTRE DE FAITS ANECDOTIQUES

Le registre des faits anecdotiques renvoie à l'information spontanée que l'on recueille suite à un comportement, un effort, une réussite, des attitudes, des changements de performance, des habiletés sociales ou de communication qui sont dignes de mention. Ces registres devraient être tenus sous forme de journal hebdomadaire ou quotidien, sous forme de dossier individuel; ils pourraient avoir une place spécifique dans le livre réservé aux notes ou dans un classeur commun qui soit à recueillir une collection de notes sur une courte période de temps.

Les registres de faits anecdotiques fournissent des renseignements spécifiques et datés pouvant servir de base aux conclusions et aux évaluations. Ces registres s'avèrent souvent fort utiles pour clarifier les évaluations et donner de la crédibilité aux observations et aux

recommandations présentées lors de rencontres avec les élèves, les parents ou les enseignants.

ÉVALUATION ÉCRITE

L'évaluation traditionnelle à choix multiples et à questions à répondre fait partie de cette catégorie.

Deux autres sortes d'évaluations écrites peuvent être utilisées. La première consiste en un projet de recherche, dans lequel les élèves doivent travailler sur un point en particulier. La technique d'évaluation et le système de point utilisé dans ce cas ressemblent à ceux utilisés en français ou en études sociales.

La seconde méthode d'évaluation est le diagnostic écrit. Des évaluations écrites qui répondent à des questions mathématiques spécifiques, écrites dans un style expressif, ont démontré beaucoup de succès comme outils de diagnostic en mathématiques. Les réponses écrites obligent souvent les élèves à examiner leur propre compréhension de certains concepts et informent les enseignants sur la véritable compréhension que les élèves possèdent de ces concepts. Les réponses écrites donnent un aperçu du niveau de compréhension des élèves et de leur raisonnement. On peut par exemple demander aux élèves de donner un exemple non mathématique de la règle de l'opposé (a - + b = a + - b). Cette réponse donnera à l'enseignant plus d'informations en ce qui concerne la compréhension des élèves que ne le feraient 10 questions mathématiques du genre 3 - 4 = _____. On peut consigner les réponses écrites dans un journal de l'élève ou dans un journal de bord. Ce type de questions peut être donné sur une base régulière (une ou deux fois par semaine) ou être donnés sous forme de test.

ÉVALUATION EN GROUPE ET AUTO-ÉVALUATION

En demandant aux élèves de participer à une évaluation, ils deviennent alors engagés dans leur propre apprentissage. Dans l'auto-évaluation, l'élève réfléchit sur son apprentissage personnel et peut alors établir ses propres objectifs dans le but de s'améliorer. La capacité de s'auto-évaluer devient importante lorsque l'élève quitte l'environnement de la classe. Des conférences peuvent traiter de l'auto-évaluation. L'enseignant peut initier efficacement les élèves à l'auto-évaluation. (Comment as-tu réussi à résoudre ce problème ? Quels arguments peuvent appuyer ta solution ?)

Dans l'évaluation en groupe, l'élève découvre l'importance des travaux en mathématiques qui lui sont donnés et ce type d'évaluation lui permet de développer un sens d'appréciation de l'esprit d'équipe dans la résolution de problèmes. Des listes de contrôle sont utiles pour noter les résultats des évaluations en groupe ou ceux des auto-évaluations.

Pour obtenir des exemples d'évaluation destinés aux élèves, reportez-vous à l'annexe C.

L'ÉCRIT EN MATHÉMATIQUES

La communication tant écrite qu'orale joue un rôle crucial dans la mise en place de ce programme de MATHÉMATIQUES. Les élèves ne devraient pas seulement avoir l'occasion d'échanger leurs idées lorsqu'ils travaillent en groupe pour résoudre des problèmes, mais ils doivent également avoir l'occasion d'exprimer leurs idées par écrit.

L'écrit mathématiques demande aux élèves de réfléchir sur leur raisonnement, améliorant ainsi leur développement cognitif. L'écrit aide également l'enseignant; plus que le simple fait de répondre aux questions, elle révèle le niveau de compréhension de l'élève. Puisque vous aurez une bonne idée de l'endroit « où » sont rendus les élèves (dans leur compréhension), vous aurez un bagage d'informations nécessaire pour planifier des leçons de MATHÉMATIQUES qui encouragent le raisonnement et la compréhension.

Le type d'écrit (celui qui décrit l'état d'esprit et le raisonnement) sera nouveau pour les élèves. Par ce fait, les élèves devront consacrer du temps pour aller « au-delà de la bonne réponse ». L'importance accordée à l'écrit permettra aux élèves d'atteindre l'objectif de la compétence en mathématiques qui préconise le raisonnement et la compréhension sur la « façon » dont les problèmes sont résolus.

Pour obtenir plus d'informations et des exemples d'écriture mathématiques au niveau du secondaire, reportez-vous à l'annexe D.

SÉQUENCE DES COURS

Afin de répondre aux différents besoins, aux champs d'intérêt et aux habiletés des élèves, le programme de mathématiques au secondaire deuxième cycle est constitué de quatre séquences. Dans chacune de ces séquences, on vise le développement de la compétence en mathématiques comme but premier et on présente un programme dont le contenu est axé sur le contexte de résolution de problèmes.

MATHÉMATIQUES 16 ET 26

Les cours de mathématiques 16 et 26 sont destinés aux élèves du programme d'intégration professionnelle. Suite à la réussite de ce cours, les élèves auront acquis les connaissances mathématiques nécessaires à l'obtention du Certificat de réussite.

MATHÉMATIQUES 14 ET 24

Les cours de mathématiques 14 et 24 sont destinés aux élèves dont les besoins, les habiletés et les champs d'intérêt sont axés sur la compréhension mathématique de base. L'accent est mis sur l'acquisition d'habiletés pratiques et permet aux élèves de parfaire leurs habiletés mathématiques. Les élèves qui réussissent avec succès le cours de Mathématiques 24 décideront alors d'entrer sur le marché du travail ou de choisir un programme parmi ceux qui leurs seront accessibles. Les exigences en mathématiques pour l'obtention du Diplôme général d'études secondaires sont : Mathématiques 14 et Mathématiques 24.

MATHÉMATIQUES 13, 23 ET 33

Les cours de mathématiques 13, 23 et 33 comprennent des parties de l'algèbre, de la géométrie, de la trigonométrie, des statistiques et des mathématiques destinées aux consommateurs. Cette séquence est conçue pour les élèves qui veulent fréquenter un collège communautaire ou technique, une école de métiers ou faire leur entrée sur le marché du travail. Lorsque les élèves ont réussi avec succès les cours de Mathématiques 23, ils ont acquis les connaissances mathématiques nécessaires à l'obtention du Diplôme général d'études secondaires.

MATHÉMATIQUES 10, 20 ET 30

Les cours de mathématiques 10, 20 et 30 sont conçus pour les élèves qui démontrent des aptitudes et un intérêt pour les mathématiques et qui ont l'intention de poursuivre des études postsecondaires dans une université ou dans un programme de mathématiques intensif offert par un institut de technologie ou par un collège. Les cours de Mathématiques 10, 20 et 30 mettent l'accent sur le développement théorique des matières, comme l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie et les statistiques, jusqu'à l'obtention d'un niveau de connaissances acceptables qui puisse permettre d'accéder à des études universitaires ou à d'autres programmes offerts par différentes institutions postsecondaires. Lorsque les élèves ont réussi avec succès le cours de Mathématiques 30, ils auront acquis les connaissances mathématiques nécessaires à l'obtention du Diplôme supérieur d'études secondaires.

MATHÉMATIQUES 31

Ce cours de mathématiques 31 est destiné aux élèves avancés démontrant une grande motivation et qui désirent prendre un premier cours axé sur le calcul différentiel et sur les vecteurs. Le cours de Mathématiques 30 est un préalable ou doit être suivi en même temps.

TRANSFERT ENTRE LES SÉQUENCES DE COURS

En raison de leurs intérêts, de leurs besoins et de leurs habiletés, les élèves qui débutent leurs études secondaires auront peut-être choisi de débuter leur éducation mathématique en prenant un des cours de 10^{e} année. Certains élèves désireront peut-être compléter un cours de base en 10^{e} année de mathématiques afin d'augmenter leurs chances de réussite dans un cours plus avancé. La multitude de transferts de cours possibles permet aux élèves de changer de séquence de cours, lorsque nécessaire, pour accéder à un niveau de difficulté approprié.

Un élève qui réussit un cours avec une note égale ou supérieure à 50 % devient éligible pour prendre le cours suivant de la même séquence.

Le conseil scolaire devrait posséder une certaine ligne de conduite qui énonce clairement les critères que l'élève doit rencontrer lorsqu'il désire changer son cheminement de programme.

Lorsque vient le temps de conseiller un élève sur les changements de séquences qui lui sont possibles, certaines circonstances doivent être prises en considération :

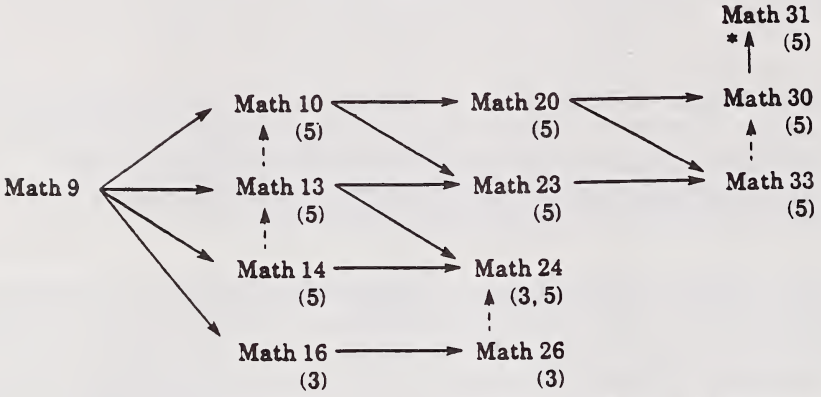
- les habiletés de l'élève et sa motivation;
- les choix doivent être faits dans le meilleur intérêt de l'élève;
- les jugements doivent être émis sur une base individuelle et non par rapport à une classe entière.

Lorsqu'un élève passe de la séquence 10, 20 et 30 à la séquence 13, 23 et 33, ou de la séquence 13, 23 et 33 à la séquence 14 et 24, il devrait suivre un cours de niveau plus élevé (par exemple : de Mathématiques 20 à Mathématiques 33 ou de Mathématiques 13 à Mathématiques 24). Lorsqu'un élève passe à une séquence moins exigeante, le directeur peut alors modifier les préalables pour les élèves qui ont obtenu une note inférieure à 50 %.

Lorsqu'ils auront réussi le cours de Mathématiques 33, certains élèves désireront peut-être suivre le cours de Mathématiques 30, afin de se qualifier pour l'obtention du Diplôme supérieur d'études secondaires. Les élèves qui envisagent ce transfert doivent être au courant des exigences que ce cours demande et doivent être en mesure de démontrer un certain niveau de réussite dans le cours de Mathématiques 33 afin de maximiser leurs possibilités de réussite dans le cours de Mathématiques 30. Même si cela est moins fréquent, il y aura peut-être certains élèves qui désireront suivre le cours de Mathématiques 20 après avoir suivi Mathématiques 23, ou Mathématiques 13 après Mathématiques 14, ou encore qui désireront suivre le cours de Mathématiques 24 après avoir suivi le cours de Mathématiques 26. Le directeur de l'école devra alors modifier son barème de préalables pour les élèves qui désirent effectuer ce type de transfert. Le élèves qui ont obtenu des crédits dans un cours de niveau inférieur ne sont pas éligibles aux crédits accordés dans les cours où les préalables n'ont pas été respectés. Les élèves qui complètent la séquence 13, 23 et 33, par exemple, et qui réussissent avec succès le cours de Mathématiques 30, ne sont pas éligibles aux crédits accordés pour les cours de Mathématiques 10 ou 20, dont les préalables n'ont pas été respectés, à moins de suivre le cours.

Pour en savoir davantage sur les transferts entre séquences de cours et sur les crédits rétroactifs accordés, reportez-vous au *Guide de l'éducation : Manuel du secondaire deuxième cycle 1992-1993.*

Les programmes développés à l'échelle provinciale ont été conçus pour permettre le transfert entre les séquences de cours à des points particuliers. Dans le diagramme ci-dessous, les préalables normaux sont indiqués par une ligne pleine et les transferts recommandés par une ligne pointillée. Pour des raisons particulières, certains élèves peuvent effectuer un transfert à d'autres points dans le programme d'études. Toutes les décisions à propos du transfert d'un élève entre deux séquences de cours seront prises à l'école même, puisque c'est là qu'il est possible de déterminer ce qui est préférable pour le meilleur intérêt de l'élève.



Le cours de Math 30 est un préalable ou doit être suivi en même temps que Math 31.

(valeurs des crédits indiquées entre parenthèses)

MATÉRIEL DIDACTIQUE

Introduction

Il existe trois catégories de matériel didactique : de base, d'appui et autre matériel didactique. Ces catégories comprennent les ressources imprimées et non imprimées, ainsi que les logiciels pouvant être utilisés par les enseignants ou les élèves dans le but de faciliter l'enseignement ou l'apprentissage.

Matériel didactique de base

Le matériel didactique de base pour l'élève désigne les ressources autorisées par Alberta Education qui permettent d'atteindre la majorité des objectifs d'apprentissage reliés à un cours ou à des composantes importantes d'un ou de plusieurs cours, ou qui permettent d'atteindre les objectifs d'apprentissage généraux reliés à au moins deux années d'enseignement d'une matière faisant partie des Programmes d'études du Ministère. Ces ressources comprennent le matériel imprimé et audiovisuel de même que les didacticiels et les objets à manipuler.

Matériel didactique d'appui

Le matériel didactique d'appui pour l'élève désigne les ressources autorisées par Alberta Education qui permettent d'atteindre certains objectifs d'apprentissage reliés à un cours ou à des composantes d'un ou de plusieurs cours, ou qui contribuent à l'atteinte des objectifs d'apprentissage généraux reliés à au moins deux années d'enseignement d'une matière faisant partie des Programmes d'études du Ministère. Ces ressources comprennent le matériel imprimé et audiovisuel de même que les didacticiels et les objets à manipuler.

Autre matériel didactique

Cette catégorie de ressources est celle que Alberta Education considère comme étant susceptible d'aider l'enseignant à mettre en oeuvre un cours ou un programme. Toute fois ces ressources n'ont pas été évaluées par Alberta Education. Le Ministère ne se tient pas responsable de l'utilisation de ces ressources avec les élèves. Un énoncé de non-responsabilité apparaît dans les documents d'appui lorsque ces ressources sont mentionnées.

Les ressources suivantes servent à appuyer les cours de Mathématiques 30 et 33. Les abréviations pour les ressources tirées du guide d'enseignement sont notées entre parenthèses. Une description des ressources d'appui et autres ressources est donnée à l'annexe B.

MATHÉMATIQUES 30 ET 33

Doré J. et autres, *Mathématique Soleil 5*, option II, tome 1. Guérin 1987 (MS5, 02, T1)

Doré J. et autres, *Mathématique Soleil 5*, option II, tome 2. Guérin 1987 (MS5, 02, T2)

Dallaire R. et autres, *Mathématique Soleil 5*. Guérin 1987 (MS5)

Dallaire R. et autres, *Mathématique Soleil 4*, option I, tome 1. Guérin 1986 (MS4, 01, T1)

Doré J. et autres, *Mathématique Soleil 4*, option I, tome 2. Guérin 1987 (MS4, 01, T2)

Boursier et Viau, *Mathématique au Secondaire BMS*, module 5A. HRW 1987 (BMS, 5A)

Philips Suzanne, *Mathématique au Secondaire BMS*, module 5B. HRW 1987 (BMS, 5B)

Assouline et autres, *Mathématique au Secondaire BMS*, module 4C. HRW 1986 (BMS, 4C)

Assouline et autres, *Mathématique au Secondaire BMS*, module 4D. HRW 1986 (BMS, 4D)

Labrie Jean-Marie, Collection Mathématique d'un infini à l'autre, *Mathématiques 434*, Les Entreprises Culturelles enr. 1986 (INF, M434)

Labrie Jean-Marie, Collection Mathématique d'un infini à l'autre, *Mathématiques 534*, Les Entreprises Culturelles enr. 1986 (INF, M534)

Bourget B. et autres, Mathématique 064-424, Lidec inc. 1986 (M064-424)

COMMENT UTILISER LE GUIDE D'ENSEIGNEMENT

Le guide d'enseignement vise à aider les enseignants dans la conception des cours de Mathématiques 30 et 33. Il est spécialement conçu pour être utilisé de façon régulière. Les principales composantes du guide sont décrites ci-dessous.

CONCEPT 1

L'encadrement du concept comprend les objectifs spécifiques d'apprentissage tirés du programme d'études.

REMARQUES

La section **remarques** comprend des commentaires qui permettent de clarifier les objectifs d'apprentissage énoncés. Elle donne un aperçu de la matière que les élèves peuvent avoir étudiée dans les cours précédents et elle fournit des renseignements concernant la matière qui peut s'avérer superflue. On y retrouve également des exemples aidant à cerner le contenu.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Cette section comporte des suggestions d'activités et des exemples de problèmes qui sont pertinents aux objectifs d'apprentissage énoncés. Elle donne également des références tirées de divers ouvrages ou publications qui peuvent aider à atteindre les objectifs énoncés dans les objectifs d'apprentissage. Parfois, on retrouvera des problèmes ou des activités qui s'appliquent aux objectifs d'apprentissage énoncés; ceux-ci seront accompagnés d'un nombre (**Activité** ou **Problème 2.2** par exemple : cette activité ou ce problème correspond à l'objectif d'apprentissage 2.2). Si la remarque est précédée du mot « Activité » ou « Problème », elle se rapporte alors à la totalité du concept.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Cette section comporte des suggestions d'exercices spécifiques à réaliser à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, de programmes sur vidéocassettes ou de logiciels autorisés.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

On retrouve quelquefois des suggestions visant à approfondir l'enseignement. Ces suggestions comprennent des problèmes et des activités qui sont des approfondissements des objectifs d'apprentissage énoncés.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME

Cette section fait la corrélation entre les ressources de base et d'appui et le programme d'études pour les cours de Mathématiques 30 et 33.

MATHÉMATIQUES 30

DEGRÉ D'IMPORTANCE DES COMPOSANTES DU PROGRAMME

Matière obligatoire

La majeure partie du contenu des cours de mathématiques du niveau secondaire est composée de sujets qui sont obligatoires pour tous les élèves. La **matière obligatoire** représente 80 % du cours et comprend les concepts, les techniques et les attitudes que tous les élèves doivent apprendre et posséder. De plus, la matière obligatoire comprend la maîtrise de certaines méthodes particulières de résolution de problèmes et d'utilisation de la technologie.

Matière facultative

Chaque cours comprend également une partie qui constitue 20 % du contenu total et qui est composée de **matière facultative** compatible avec le contenu et les exigences de la partie obligatoire. La raison d'être de cette matière facultative consiste à permettre d'introduire des notions théoriques ou des activités expérimentales de renforcement, de rattrapage ou d'innovation. Il ne s'agit pas de fournir aux élèves une accélération ni des équivalences de cours. L'approfondissement et le renforcement sont toutefois indiqués et des ouvrages facultatifs répondant aux exigences et aux intérêts des élèves doivent être mis à leur disposition.

Degré d'importance suggéré (en %) pour la matière obligatoire de Mathématiques 30

La répartition suivante ne représente qu'une suggestion visant à aider l'enseignant dans le processus de planification. En effet, un élève peut nécessiter plus ou moins d'efforts qu'un autre pour terminer une unité d'apprentissage.

Unité d'apprentissage	Degré d'importance suggéré (en %)
Fonctions polynomiales	10
Fonctions trigonométriques et circulaires	15
Statistiques	15
Relations quadratiques	10
Fonctions exponentielles et logarithmiques	10
Permutations et combinaisons Théorème des binômes	10
Suites et séries	10
Matière facultative	20

ATTITUDES

Les élèves devront faire preuve d'une attitude qui dénote une compétence en mathématiques. De façon plus précise, *les élèves devront* :

- avoir confiance en leurs connaissances mathématiques et en leur capacité d'acquérir de nouvelles connaissances;
- faire preuve de persévérance, de détermination, de souplesse et d'ingéniosité dans la résolution de problèmes;
- développer une curiosité intellectuelle et une ouverture d'esprit face aux nouvelles idées et aux changements de l'apprentissage des mathématiques;
- faire preuve de curiosité et de spontanéité et reconnaître la créativité et l'innovation dans la représentation mathématique de situations;
- être critiques et constructifs pour aborder de nouvelles idées et de nouveaux processus;
- connaître l'importance des capacités de communiquer en mathématiques;
- reconnaître l'utilité des aptitudes de calcul, des processus mathématiques et des techniques de résolution de problèmes utilisés dans le cadre des processus décisionnels et de modélisation dans notre société;
- être au courant de l'apport des mathématiques à notre culture et notre civilisation.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Les élèves devront utiliser différentes méthodes leur permettant de comprendre les problèmes mathématiques. De façon plus précise, ils devront :

- lire attentivement le problème;
- identifier et préciser les composantes-clés;
- énoncer de nouveau le problème en utilisant des termes courants;
- évaluer les renseignements fournis afin de déterminer s'ils sont suffisants ou s'ils contiennent des éléments superflus;
- interpréter des illustrations, des diagrammes et des graphiques;
- découvrir les hypothèses cachées, le cas échéant;
- poser des questions pertinentes;
- identifier les renseignements fournis, requis et désirés;
- représenter le problème à l'aide d'un diagramme ou d'un modèle;
- employer la notation adéquate;
- déterminer les inférences valables.

Les élèves devront développer différentes stratégies servant à résoudre des problèmes mathématiques. De façon plus précise, ils devront :

- mener une enquête;
- se servir des techniques d'évaluation et d'approximation;
- développer des équations ou employer des formules;
- utiliser des organigrammes;
- dresser des listes et réaliser des diagrammes;
- rechercher des modèles;
- procéder à rebours;

- subdiviser le problème;
- rechercher un problème plus simple ou associé;
- réaliser des diagrammes ou des modèles;
- se servir du matériel de manipulation;
- choisir et ordonner une suite d'opérations mathématiques;
- tracer le graphique illustrant un problème;
- mettre au point une méthode pour la cueillette et l'organisation des données.

Les élèves devront développer différentes techniques permettant de mettre à exécution le plan de résolution d'un problème. De façon plus précise, ils devront :

- appliquer des stratégies choisies;
- présenter les idées de façon claire;
- noter par écrit le processus de résolution;
- faire preuve des comportements de groupe appropriés;
- se servir de calculatrices et d'ordinateurs;
- évaluer l'efficacité des stratégies de résolution de problèmes;
- rechercher des informations supplémentaires;
- poser des questions;
- demeurer réceptifs à l'inspiration, aux intuitions et aux « idées géniales ».

Les élèves devront employer différentes techniques leur permettant d'examiner la solution d'un problème. De façon plus précise, ils devront :

- déterminer si une réponse est valable;
- expliquer la solution oralement ou par écrit;
- considérer la possibilité de l'existence d'autres solutions;
- rechercher d'autres stratégies et processus de résolution;
- concevoir et résoudre des problèmes similaires;
- remarquer les caractéristiques qu'il sera possible d'identifier dans des problèmes similaires;
- effectuer une généralisation.

FONCTIONS POLYNOMIALES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 10 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une fonction polynomiale est une fonction de la forme $f(x) = a_nx^n a_{n-1}x - 1 \ldots ax + a_0$, pour les nombres réels $a_0, a_1, \ldots a_n$ et pour $x \in N$.		
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une fonction polynomiale peut être représentée sur le plan cartésien et que les graphiques ainsi créés possèdent des caractéristiques correspondant à la fonction qui est décrite.	Les élèves devront être en mesure de tracer les graphiques de fonctions polynomiales à coefficients entiers.	Les élèves devront être en mesure de tracer les graphiques de fonctions polynomiales à coefficients entiers à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Les élèves devront être en mesure d'examiner les caractéristiques des graphiques des fonctions polynomiales de différents degrés et de déterminer l'influence qu'exerce une multiplicité de zéros sur les graphiques de fonctions polynomiales. Les élèves devront être en mesure de trouver des valeurs approximatives, pour les zéros de fonctions polynomiales à coefficients entiers, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Les élèves devront être en mesure d'analyser des points, sur les graphiques de fonctions polynomiales, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes pouvant être représentés par des fonctions polynomiales.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que de nombreuses fonctions polynomiales peuvent avoir les mêmes zéros.	Les élèves devront être en mesure de dériver l'équation d'une fonction polynomiale à coefficients entiers d'après ses zéros. Les élèves devront être en mesure de dériver l'équation d'une fonction polynomiale à coefficients entiers d'après ses zéros et d'après une paire ordonnée qui satisfait la fonction.	Les élèves devront être en mesure de trouver l'équation d'une fonction polynomiale d'après ses zéros et d'après toute autre information donnée qui la définit de façon unique.

FONCTIONS POLYNOMIALES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 10 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent la forme de l'algorithme de division; si un polynôme P(x) est divisé par un binôme de la forme (x - a), [appelé D(x)], on obtiendra comme résultat un quotient polynomial Q(x) et un reste R.	Les élèves devront être en mesure de diviser une fonction polynomiale à coefficients entiers à une variable par un binôme de la forme (x - a), pour a $\in$ Q. Les élèves devront être en mesure d'écrire l'opération de la division d'une fonction polynomiale par un binôme sous la forme de l'algorithme de division P(x) = D(x)Q(x) + R.	
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que lorsqu'une fonction polynomiale P(x) est divisée par un binôme de la forme (x - a), le reste, R, est égal à P(a) (théorème du reste).	Les élèves devront être en mesure d'utiliser le théorème du reste pour évaluer les fonctions polynomiales dont la variable comporte des valeurs rationnelles. Les élèves devront être en mesure d'utiliser le théorème de factorisation pour factoriser complètement une fonction polynomiale à coefficients entiers et pour déterminer tous ses zéros réels.	Les élèves devront être en mesure de prouver le théorème du reste. Les élèves devront être en mesure d'utiliser le théorème du reste afin de prouver que si un nombre « a » est un zéro d'une fonction polynomiale P(x), alors (x - a) sera un facteur de P(x) (théorème de factorisation). Les élèves devront être en mesure d'utiliser la technologie pour factoriser une fonction polynomiale. Les élèves devront être en mesure de reconnaître que tous les zéros rationnels d'une fonction polynomiale sont sous la forme p/q, p étant un facteur de a_0 et q un facteur de a_n.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une fonction polynomiale est une fonction de la forme $f(x) = a_x x^n r a_{x-1} x - 1 \ldots ax + a_0$, pour les nombres réels a_0, a_1, ... a_x et pour $x \in N$.

REMARQUES

On peut établir un rapport entre ce concept et les connaissances enseignées précédemment, les quadratiques en Mathématiques 20 par exemple.

Une révision de la terminologie associée aux fonctions polynomiales peut s'avérer nécessaire. Toutefois, ne revoyez ces termes que lorsqu'ils apparaissent dans le contexte. Une liste du vocabulaire à mémoriser figurant au début de l'unité ne serait que très peu utile.

On devrait mentionner que les fonctions polynomiales peuvent être exprimées à l'aide de variables autres que « x » et « y » et qu'elles peuvent représenter des phénomènes physiques.

On peut demander aux élèves d'écrire des exemples de fonctions polynomiales, de même que des exemples de fonctions autres que polynomiales.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Demandez aux élèves d'écrire des formules qu'ils ont employées dans le cadre de cours de physique ou de mathématiques précédents et qui sont des fonctions polynomiales. Ce peut être, par exemple, l'aire totale d'un cylindre de 770 cm de hauteur, l'aire d'une sphère, la distance entre une particule et un point fixe ($f(t) = 40 - 15t + 4t^2 + 3t^3$; il est à noter qu'il s'agit d'une situation spécifique). Ces formules peuvent être évaluées en fonction de différentes valeurs de la variable.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Évaluez des expressions à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel tableur.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Soit une table de valeurs; écrivez la fonction qui représente ces données. Utilisez des techniques comme celle qui consiste à deviner et à vérifier et celle des différences finies, afin de trouver les fonctions.

(Pour obtenir plus de détails sur la méthode des différences finies, reportez-vous au manuel Mathematics Teacher, volume 79, numéro 6, septembre 1986). Utilisez les formules de la section des suites et séries si vous avez présenté cette section avant d'enseigner les polynômes.

Si cette section a été introduite à l'aide de graphiques de fonctions polynomiales, il est alors possible de déterminer, à partir du graphique, une table des valeurs qui serait ensuite vérifiée par substitution dans la fonction.

En analysant le graphique de la fonction, l'élève peut prédire la valeur maximale ou minimale d'un polynôme, ou les deux, de même que la valeur de « x » associée à cette valeur et les valeurs de « x » pour lesquelles la valeur du polynôme est positive, négative ou égale à zéro.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 5 à 13 et 101 à 104
INF, M534 : pages 75 à 81
BMS, 5A : pages 1 à 7

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une fonction polynomiale peut être représentée sur le plan cartésien et que les graphiques ainsi créés possèdent des caractéristiques correspondant à la fonction qui est décrite.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 tracer les graphiques des fonctions polynomiales à coefficients entiers;

- 2.1.1 tracer les graphiques de fonctions polynomiales à coefficients entiers à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur;
- 2.1.2 examiner les caractéristiques des graphiques des fonctions polynomiales de différents degrés et de déterminer l'influence qu'exerce une multiplicité de zéros sur les graphiques de fonctions polynomiales;
- 2.1.3 trouver des valeurs approximatives pour les zéros de fonctions polynomiales à coefficients entiers à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur;
- 2.1.4 analyser certains points sur les graphiques de fonctions polynomiales à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur;
- 2.1.5 résoudre des problèmes pouvant être représentés en utilisant des fonctions polynomiales.

REMARQUES

Dans l'ouvrage Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989), publié par le NCTM, on affirme, à la page 128, que l'utilisation de la calculatrice et de l'ordinateur avec des logiciels adéquats transforme la salle de classe en laboratoire dans lequel les moyens techniques sont mis à la disposition des élèves et dans lequel les enseignants encouragent les expériences diverses. En utilisant des logiciels graphiques pour résoudre des problèmes d'ordre général, on peut traiter efficacement des propriétés des polynômes et de leurs graphiques.

Pour les fonctions polynomiales de cette section, il ne sera question que de celles possédant des coefficients entiers (autrement dit, il n'y aura pas de coefficients formés par des rationnels ou des irrationnels).

Une fois que les élèves connaissent les relations qui existent entre les zéros et les abscisses à l'origine, on doit aborder avec eux les zéros multiples et l'influence qu'ils exercent sur le graphique.

Ainsi, $y = (2x - 1)(x - 2)^2(x + 7)^3$ possède six zéros :

-7 avec une multiplicité de 3;
+2 avec une multiplicité de 2;
+1/2 avec une multiplicité de 1.

Il est parfois difficile de voir la multiplicité de trois sans l'utilisation d'un logiciel graphique.

Les élèves devraient être en mesure de reconnaître le degré d'une fonction polynomiale à l'aide de son graphique. Ils devraient également connaître l'influence qu'exerce le signe du coefficient dont la puissance est la plus élevée sur la forme du graphique. Encore une fois, on devrait permettre aux élèves de découvrir ces influences et les encourager à noter leurs découvertes par écrit ou, du moins, à les partager avec le groupe.

On peut inciter les élèves à pousser plus loin en posant des questions hypothétiques du genre de celles qui suivent :

Que se produit-il si le coefficient de la puissance la plus élevée est négatif ?
Que se produit-il si les coefficients sont séquentiels ? ($y = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ par exemple)

Les élèves devraient comprendre le lien qui existe entre les équations polynomiales et les fonctions. En traçant le graphique de la fonction correspondante et en recherchant les abscisses à l'origine, il est possible de trouver une approximation des racines de toute équation polynomiale. Cela s'avère particulièrement utile pour les fonctions polynomiales qui ne peuvent être factorisées.

Il n'est pas nécessaire que les élèves connaissent la représentation des nombres complexes (la notation « i », par exemple, dépasse le contenu de ce cours). On devrait expliquer l'existence des racines complexes par la présence de facteurs comme $(x^2 + 1)$ qui ne possèdent pas de solution réelle. L'influence qu'exercent les racines complexes sur le graphique devrait être comprise.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Demandez à l'élève de remplir une table comme celle représentée ci-dessous, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel graphique. (Cette activité peut renforcer ou introduire la relation qui existe entre les facteurs et les abscisses à l'origine). Les élèves travailleront en groupes et devront décrire les relations qu'ils découvrent entre les colonnes.

Forme factorisée de la fonction	Esquisse	Forme développée de la fonction
$y = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$		
$y = x(x + 1)(x - 4)(x + 5)$		
		$y = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$
		$y = x^3 + 11x^2 + 23x + 35$

Activité : Encore une fois, on demandera aux élèves d'utiliser les moyens techniques disponibles pour remplir les colonnes ci-dessous. (La première ligne est complétée pour eux). Avant de commencer, ils auraient peut-être besoin de revoir leurs connaissances au sujet des rapports qui existent entre une fonction quadratique et son équation correspondante (tiré de Mathématiques 20).

Fonction	Équation correspondante	Solution de l'équation
$y = x^3 - 9x + x^2 - 9$	$x^3 - 9x + x^2 - 9 = 0$	$x = -3, -1, +3$
$y = x^4 - 9x^2 + 3x + 12$		
$y = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$		
		$x = -1, 5, 8$
		$x = 0, -3, 1$
	$(x - 1)(x + 2)(x - 5) = 0$	

Problème : Écrire un polynôme quelconque du troisième degré dont le coefficient du terme x^3 est égal à un et qui ne peut pas être factorisé. Vérifier à l'aide d'une représentation graphique.

Problème : Résoudre l'équation polynomiale qui correspond à la fonction du problème ci-dessus (au millième près). Cela nécessitera peut-être une connaissance spéciale de la calculatrice qui sera utilisée. Cela constitue également un moment propice pour se servir de certains programmes en langage Basic figurant dans de

nombreux manuels et qui sont conçus spécialement pour répondre à ce genre de problème (MS5, 02, T2 : pages 226 à 232). Il est également possible de se servir d'un logiciel tableur pour résoudre ce problème.

Activité : Tenter de prédire la forme des graphiques de fonctions polynomiales du 5^{e} et du 6^{e} degré. Vérifier à l'aide d'exemples spécifiques.

Activité : Créer différents polynômes de multiplicité de 2 ou de 3. Représenter graphiquement et décrire par écrit ce qui se produit (l'enseignant désirera peut-être mentionner le terme point d'inflexion). Il est entendu que les élèves poseront des questions sur l'influence exercée par des multiplicités plus élevées. On devrait les encourager à découvrir ces influences par eux-mêmes.

Problème : Écrire une fonction polynomiale à coefficients entiers qui possède deux zéros complexes et un zéro rationnel avec une multiplicité de 2. (Vérifier à l'aide d'une représentation graphique.)

Problème : Écrire une fonction polynomiale à coefficients entiers qui possède deux zéros irrationnels, deux zéros complexes et qui passe par le point (2, 10).

Activité : Produire un organigramme qui démontre les étapes qu'une personne peut suivre pour tracer le graphique d'une fonction polynomiale (à partir de l'étape initiale de factorisation du polynôme), en supposant qu'elle ne possède pas de calculatrice graphique.

Activité : Résoudre les problèmes de calcul du maximum-minimum de Mathématiques 31 sans la dérivée, en traçant le graphique de la fonction concernée et en trouvant de façon approximative l'endroit où se situe le maximum ou le minimum. Choisissez des problèmes dans lesquels la fonction est donnée et aussi pour lesquels l'élève doit développer une fonction.

> À titre d'exemple, la question de la page 53 du manuel Mathematics 31 donne la formule $V = 4x^3 - 44x^2 + 96x$. On peut demander aux élèves quelles sont les valeurs qui donnent un volume égal à zéro et quelle est celle qui donne un maximum, puis leur demander de trouver la valeur du maximum. (Reportez-vous également à tout texte de calcul qui traite des maxima et des minima.)

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 13 à 76 et 105 à 110
INF, M534 : pages 87 à 99 et 113 à 124
BMS, 5A : pages 12 à 38 et 48 à 70

CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que de nombreuses fonctions polynomiales peuvent avoir les mêmes zéros.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1 dériver l'équation d'une fonction polynomiale à coefficients entiers d'après ses zéros;

3.2 dériver l'équation d'une fonction polynomiale à coefficients entiers d'après ses zéros et d'après une paire ordonnée qui satisfait la fonction;

3.2.1 trouver l'équation d'une fonction polynomiale d'après ses zéros et d'après toute autre information donnée qui la définira de façon unique.

REMARQUES

Les élèves ne savent peut-être pas que les zéros d'un polynôme ne déterminent pas uniquement son équation. Ainsi, $y = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$ et $y = 3(x - 1)(x + 3)(x + 2)$ possèdent tous deux les mêmes zéros. On peut introduire cette idée en comparant des fonctions du premier et du second degré qui sont liées de cette façon (comparez par exemple $y = x + 2$ et $y = 2x + 4$ ou $y = x^2 + 3x$ et $y = 2x^2 + 6x$). En permettant aux élèves de tracer le graphique à l'aide des moyens technologiques disponibles, ils seront en mesure de tirer leurs propres conclusions.

Dans cette section, on devrait rappeler aux élèves le travail qu'ils ont fait, en Mathématiques 33 et 20, sur les transformations de fonctions (comme le rapport qui existe entre f(x) et cf(x), pour un nombre réel c).

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème : Résoudre le système donné par $y = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$ et $y = 2(x - 1)(x + 3)(x - 2)$. Dans ce problème, les élèves devraient constater que les graphiques, quoique semblables en plusieurs aspects, ne possèdent que trois points en commun.

Activité : Comparer les graphiques des fonctions données par cf(x), pour $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et pour les valeurs suivantes de c : 1, 2 et -3. Décrire brièvement leurs ressemblances et leurs différences.

Problème : Concevoir une fonction qui possède certaines caractéristiques prédéterminées, puis vérifier la réponse à l'aide d'une représentation graphique. Un exemple pourrait être de trouver une fonction polynomiale ayant des zéros de 1, 2 et -3 et qui passe par le point (5, 192).

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 57 à 60
BMS, 5A : pages 66 à 68
INF, M534 : pages 123 à 126

CONCEPT 4

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent la forme de l'algorithme de division des polynômes : si un polynôme P(x) est divisé par un binôme de la forme (x - a), [appelée D(x)], on obtiendra comme résultat un quotient polynomial Q(x) et un reste R.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

4.1 diviser une fonction polynomiale à coefficients entiers à une variable par un binôme de la forme (x - a), pour a $\in$ Q;

4.2 écrire l'opération de la division d'une fonction polynomiale par un binôme sous la forme de l'algorithme de division P(x) = D(x)Q(x) + R.

REMARQUES

Les élèves ont appris auparavant les longues divisions par des binômes dans le cours de Mathématiques 10. Les élèves du cours de Mathématiques 33 n'ont peut-être pas vu la division par un binôme et auront donc besoin d'aide dans ce domaine. Ne passez pas beaucoup de temps à enseigner cette application.

On ne devrait pas s'attendre à ce que les élèves passent beaucoup de temps sur une méthode particulière de division des polynômes. Il est important qu'ils comprennent que tout polynôme peut être considéré comme le produit de deux polynômes appelés dividende et quotient plus un autre polynôme appelé le reste. Ce concept conduit au théorème du reste. En se conformant à l'importance accordée par le programme révisé, il n'est pas nécessaire de mettre l'accent sur l'utilisation proprement dite d'un algorithme comme la division synthétique. On devrait encourager les élèves à utiliser différentes méthodes pour trouver les facteurs d'un polynôme, comme la représentation graphique à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel informatique, ou encore en utilisant une calculatrice ou un logiciel tableur pour évaluer des polynômes en fonction de certaines valeurs différentes. Ces méthodes sont des techniques beaucoup plus efficaces que celles faisant usage des algorithmes de division, car ces méthodes peuvent facilement s'appliquer aussi bien à des fonctions simples qu'à d'autres plus complexes.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Écrire 458 en tant que produit de deux nombres entiers plus un autre nombre entier. Expliquer la méthode employée pour trouver la réponse.

Écrire $3x^3 + 2x^2 - x + 5$ de cinq façons différentes, sous la forme D(x)Q(x) + R, D(x) étant de la forme x - a et a un entier.

Écrire $x^3 - x - 2$ de cinq façons différentes, sous la forme $D(x)Q(x)$, $D(x)$ étant de la forme $x - a$ et a un entier. Une des façons devrait comporter $R = 0$.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, 01, T1 : pages 232 à 237
INF, M434 : pages 105 à 107
BMS, 4C : pages 143 à 148

CONCEPT 5

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que lorsqu'une fonction polynomiale P(x) est divisée par un binôme de la forme (x - a), le reste R est égal à P(a) (théorème du reste).

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

5.1 utiliser le théorème du reste pour évaluer les fonctions polynomiales dont la variable comporte des valeurs rationnelles;

- 5.1.1 prouver le théorème du reste;
- 5.1.2 utiliser le théorème du reste afin de prouver que si un nombre « a » est un zéro d'une fonction polynomiale P(x), alors (x - a) sera un facteur de P(x) (théorème de factorisation);

5.2 utiliser le théorème de factorisation pour factoriser complètement une fonction polynomiale à coefficients entiers et pour déterminer tous ses zéros réels;

- 5.2.1 utiliser les moyens techniques pour factoriser une fonction polynomiale;
- 5.2.2 reconnaître que tous les zéros rationnels d'une fonction polynomiale seront de la forme p/q, p étant un facteur de a_0 et q un facteur de a_n.

REMARQUES

Comme nous l'avons mentionné dans les autres concepts, l'interprétation des graphiques devrait conduire les élèves vers un aperçu intéressant des relations qui existent entre les graphiques, les zéros et les facteurs. La calculatrice et l'ordinateur peuvent contribuer à fournir l'information graphique qui permettra aux élèves d'énoncer ces généralisations. Toutefois, tout scientifique et mathématicien soutiendra fermement qu'il existe une grande différence entre une généralisation et une preuve théorique. Une partie de ce concept consiste à aider les élèves à apprendre la façon de formaliser les relations qui semblent évidentes.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Le théorème du reste représente une excellente occasion de faire travailler les élèves en groupes et de leur demander de tirer leurs propres conclusions. Avant de développer et de prouver le théorème, une étape intermédiaire peut être un niveau d'abstraction où l'élève applique les conclusions déjà obtenues à des problèmes comme celui qui suit :

comparez le reste de $(x^2 + 2x - 1) \div (x - b)$ avec P(b), si $P(x) = x^2 + 2x - 1$.

Dans certains textes, la preuve du théorème du reste n'est pas effectuée. Elle est donc donnée ci-dessous :

À partir de l'algorithme de la division, $P(x) = D(x)Q(x) + R$
Si $P(x)$ est divisé par $x - a$, alors $P(x) = (x - a)Q(x) + R$
Si nous établissons $x = a$, alors $P(a) = (a - a)Q(x) + R$
$P(a) = 0Q(x) + R$
Par conséquent, $P(a) = R$

Étant donné que les élèves ont progressé des réponses numériques à la réponse littérale, ils devraient prendre part au développement de ce théorème.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Comme il a été mentionné précédemment, les calculatrices graphiques et les ordinateurs ont grandement changé la façon dont cette section peut être enseignée; leur utilisation est fortement recommandée. On devrait prendre le temps d'illustrer la façon d'évaluer des polynômes à l'aide de différentes méthodes, logiciel tableur, calculatrice programmable et utilisation des fonctions de mémoire sur des calculatrices plus rudimentaires par exemple.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 105 à 108

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET CIRCULAIRES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 15 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que la mesure d'un angle en radians est le rapport entre l'arc qu'il sous-tend et le rayon du cercle dont il est l'angle au centre, et qu'un radian est la mesure de l'angle sous-tendu dans un cercle par un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.	Les élèves devront être en mesure de trouver la mesure, en radians, d'un angle dans un cercle. Les élèves devront être en mesure de convertir en radians la mesure des angles donnés en degrés, et vice versa. Les élèves devront être en mesure de déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques coterminaux avec $\frac{n\pi}{6}$, $\frac{n\pi}{4}$, $\frac{n\pi}{3}$, $\frac{n\pi}{2}$ et $n\pi$, pour $n \in Z$.	
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les identités sont des énoncés d'égalité qui sont vrais pour toutes les valeurs de la variable et que les identités trigonométriques sont des équations exprimant des relations entre des fonctions trigonométriques qui sont valables pour toutes les valeurs des variables pour lesquelles les fonctions sont définies.	Les élèves devront être en mesure d'utiliser les identités trigonométriques : Identités inverses $\frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$ $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ $\frac{1}{\text{tg}\,\theta} = \text{ctg}\,\theta$ Identités du quotient $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta$ $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \text{ctg}\,\theta$ Identités de Pythagore $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\text{ctg}^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ Les élèves devront être en mesure d'utiliser les identités de l'addition et de la soustraction (formules) : $\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$ $\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$	Les élèves devront être en mesure de dériver les identités du quotient et de Pythagore en utilisant des processus de déduction. Les élèves devront être en mesure d'utiliser les identités trigonométriques de base pour simplifier, évaluer et prouver les expressions trigonométriques qui comportent des identités.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les fonctions trigonométriques peuvent être représentées graphiquement sur un plan cartésien.	Les élèves devront être en mesure de tracer le graphique des fonctions sinus, cosinus et tangente qui sont sous la forme suivante : $y = a \sin[b(\theta + c)] + d$ $y = a \cos[b(\theta + c)] + d$ $y = \text{tg}\,\theta$	Les élèves devront être en mesure d'utiliser la calculatrice ou l'ordinateur pour tracer et analyser les graphiques de fonctions trigonométriques. Les élèves devront être en mesure d'examiner l'influence qu'exercent les paramètres a, b, c et d sur les graphiques de fonctions trigonométriques en utilisant une calculatrice ou un ordinateur. Les élèves devront être en mesure de définir le domaine et l'image de toutes les fonctions trigonométriques.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET CIRCULAIRES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 15 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent les méthodes utilisées pour résoudre les équations trigonométriques.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des équations trigonométriques du premier et du second degré qui comprennent des multiples des angles du domaine 0 à 2π. Les élèves devront être en mesure de démontrer la relation qui existe entre la solution de l'équation trigonométrique et le graphique de la fonction correspondante.	Les élèves devront être en mesure d'utiliser une calculatrice électronique ou un ordinateur pour résoudre des équations trigonométriques en évaluant les graphiques des fonctions trigonométriques.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que la mesure d'un angle en radians est le rapport entre l'arc qu'il sous-tend et le rayon du cercle dont il est l'angle au centre, et qu'un radian est la mesure de l'angle sous-tendu dans un cercle par un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle. Les élèves devront pouvoir trouver la mesure, en radians, d'un angle dans un cercle.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 mesurer, en radians, un angle dans un cercle;

1.2 convertir en radians la mesure d'un angle donnée en degrés, et vice versa;

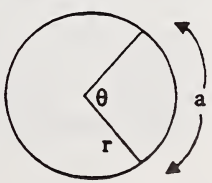
1.3 déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques qui sont coterminaux avec $\frac{n\pi}{6}$, $\frac{n\pi}{4}$, $\frac{n\pi}{3}$, $\frac{n\pi}{2}$ et $n\pi$, pour $n \in Z$.

REMARQUES

Les élèves ont travaillé auparavant avec des mesures en degrés pour les angles. En Mathématiques 20, les élèves ont appris à reconnaître et à esquisser des angles positifs et négatifs en position standard, de même que la façon de déterminer les rapports trigonométriques de tout angle en le comparant avec l'angle de référence. Il serait utile de revoir cela, ainsi que les triangles spéciaux, afin d'introduire le concept 1.3.

Pour des situations qui comportent des objets en rotation, il est plus approprié de mesurer les angles en radians.

Définition de radian : un radian est la mesure de l'angle central (sectoriel) sous-tendu par un arc égal au rayon du cercle. La mesure en radians d'un angle est le rapport entre la longueur de l'arc sous-tendant l'angle et la longueur du rayon ($\theta = a/r$). Un angle central possède son sommet au centre du cercle. L'arc que sous-tend l'angle est le sous-ensemble des points du cercle coupé par les bras de l'angle central (reportez-vous au diagramme).



La mesure en radians est une relation directe entre la longueur de l'arc et la longueur du rayon. Cela permet d'effectuer des calculs sans avoir à passer continuellement à la trigonométrie triangulaire. Les applications comprennent des questions se rapportant à la vélocité angulaire (RPM, révolutions par minute) et la distance parcourue par un point sur une roue.

La relation qui existe entre la mesure en radians et celle en degrés constitue un exemple de variation directe.

Les valeurs exactes de rapports trigonométriques des angles coterminaux avec $n\pi/6$, $n\pi/4$, $n\pi/3$, sont celles qui proviennent de l'utilisation des côtés d'un triangle de 30°, 60°, 90° ou de 45°, 45°, 90° et qui sont laissées sous forme radicale.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Demandez aux élèves de tracer un cercle sur une feuille de carton, puis d'enrouler un morceau de ficelle de longueur égale au rayon autour de la circonférence de ce cercle et de tracer l'angle au centre ainsi sous-tendu. Il s'agit ensuite de découper l'angle et de comparer sa taille à celle des angles obtenus par d'autres élèves. Enfin, mesurer l'angle et déterminer pourquoi cette mesure est un peu inférieure à 60°.

Demandez aux élèves de tracer un cercle et, à l'aide d'un morceau de ficelle de même longueur que le diamètre de ce cercle, de tracer un angle dont la longueur de l'arc est égale au diamètre. Quelle est la mesure de l'angle, en radians ?

Demandez aux élèves de tracer un cercle comprenant un angle au centre de 180°. Ils doivent ensuite trouver une méthode permettant de mesurer la taille de cet angle en radians.

Activité 2 : La conversion entre degrés et radians permet aux élèves d'associer la mesure en radians à quelque chose de connu. Commencez en posant la question suivante : « Quelle est la valeur de 1 radian en degrés ? ». Demandez aux élèves de tracer un cercle dont le rayon mesure une unité (cercle unitaire) ou n'importe quel autre cercle. Faites-leur ensuite calculer la circonférence de leur cercle. (La mesure doit être précise; dans le cas du cercle unitaire, $C = 2\pi$.) Puis, demandez-leur de trouver la mesure, en radians, d'un angle de 360°, à l'aide de la définition de la mesure en radians, et enfin, de l'entrer dans un tableau de valeurs comme ci-dessous. Faites-leur calculer, en utilisant la même méthode, la mesure en radians des angles jusqu'à 30°.

Angle en degrés	Angle en radians
360	2π
180	π
90	$\pi/2$
60	
45	$\pi/4$
30	$\pi/6$
1 degré	1 radian

Le tableau représente une variation directe. Sa règle de définition est de la forme D = kR, k étant la constante de la variation. Il s'agit de trouver la constante de la variation et l'équation résultante qui indique le rapport de la mesure en degrés à celle en radians. Compléter le tableau à l'aide de cette règle.

Activité 3 : Demandez aux élèves de créer un rapporteur d'angles en radians. Ce rapporteur peut servir à comparer les angles mesurés en radians à ceux mesurés en degrés.

Pour trouver des valeurs exactes des rapports trigonométriques des angles mesurés en radians, on peut se servir du cercle unitaire et des longueurs des arcs associés aux angles spéciaux comme 30°, 45°, 60°, 90°, etc.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Enseigner aux élèves l'emploi de la touche DRG de la calculatrice pour effectuer la conversion des degrés en radians, et vice versa.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 306 à 314
BMS, 5A : pages 136 à 140
INF, M534 : pages 2 à 18

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les identités sont des énoncés d'égalité qui sont vrais pour toutes les valeurs de la variable et que les identités trigonométriques sont des équations exprimant des relations entre des fonctions trigonométriques qui sont valables pour toutes les valeurs des variables pour lesquelles les fonctions sont définies.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 utiliser les identités trigonométriques de base :

Identités inverses	**Identités du quotient**	**Identités de Pythagore**
$\frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \text{ctg}\,\theta$	$\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
$\frac{1}{\text{tg}\,\theta} = \text{ctg}\,\theta$		$\text{ctg}^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

2.1.1 démontrer qu'ils ont compris les identités du quotient et de Pythagore à l'aide des processus de déduction;

2.1.2 se servir des identités trigonométriques de base pour simplifier, évaluer et prouver les expressions trigonométriques qui comportent des identités.

REMARQUES

Les identités sont des énoncés qui sont vrais pour toute valeur de la variable. Rappelez aux élèves qu'ils ont déjà rencontré des identités lors de l'étude des polynômes (pour la factorisation d'une expression comme $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, par exemple, ou pour effectuer des opérations de base sur les expressions, comme $(3x + 4) - (x - 2) = 2x + 6$).

Les identités inverses sont des définitions et peuvent être présentées sous cet aspect. On peut également mentionner leur signification historique (lorsque les calculs étaient effectués manuellement, il était plus facile de multiplier des nombres décimaux à l'aide de tables que de les diviser), mais elles ne doivent pas être utilisées pour résoudre les problèmes de triangles.

Les élèves peuvent se montrer intéressés par les noms de certaines fonctions, surtout « tangente » et « sécante », et désirer connaître le rapport entre les fonctions trigonométriques et les définitions des lignes et des cercles. Pour explorer ces notions, reportez-vous à la partie « Enseignement facultatif » plus loin dans cette section.

Les élèves doivent pouvoir identifier les identités en remplaçant la variable par des valeurs choisies au hasard. Il s'agit là d'un exercice

qui peut s'avérer utile, dans la plupart des cas, avant de commencer la preuve d'une identité. S'il est possible de démontrer que l'expression n'est pas vraie pour une valeur donnée, cela suffit pour affirmer que l'expression n'est pas vraie. Cela constitue une excellente occasion d'aborder le sujet des conditions requises et suffisantes pour la preuve.

La manipulation des identités trigonométriques représente une excellente occasion pour les élèves d'apprendre à « prouver » qu'une relation donnée est vraie. La nature d'une preuve doit être abordée, surtout en ce qui concerne la différence entre une vérification effectuée à l'aide de certaines valeurs de la variable et un raisonnement complet qui établit la preuve de façon générale. Il est approprié, à ce moment, d'expliquer la nature d'une preuve par raisonnement déductif et inductif. Il faut montrer aux élèves la différence entre les équations et les identités, surtout si on tient compte du fait que certaines opérations qui ont servi à résoudre des équations ne peuvent pas être utilisées pour vérifier les identités. (La « multiplication croisée », par exemple, ne convient pas aux identités, car les deux membres de l'équation sont alors considérés comme étant égaux. Pour une identité possible, celle-ci est vraie que lorsqu'on en a fait la preuve.)

On estime que la preuve des identités par la multiplication de fractions complexes par des expressions conjuguées dépasse le cadre de ce concept.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Les élèves doivent être encouragés à présenter des raisonnements logiques pour démontrer que les identités du quotient et de Pythagore sont vraies. Il est à noter que cela n'implique pas nécessairement l'emploi des processus de preuve « T » qui sont monnaie courante dans l'enseignement de la géométrie déductive. Il s'agit d'un bon moment pour parler de la déduction et pour montrer aux élèves qu'une preuve constitue une suite logique et judicieuse d'énoncés qui débutent par ce qui est donné ou connu comme étant vrai, suivi des énoncés découlant des connaissances précédemment établies et se terminant par ce qui doit être prouvé. Une preuve complète de la première identité de Pythagore figure ci-dessous :

Prouvez que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

D'après ce qui a été vu précédemment, $\frac{y}{r} = \sin \theta$ et $\frac{x}{r} = \cos \theta$ pour tous les angles tracés en position standard. Ainsi,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

Puisque nous savons, à partir des connaissances précédentes, que $y^2 + x^2 = r^2$, il s'ensuit que $\frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$.

Par conséquent, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Activité : Demandez aux élèves de créer des identités que les autres devront prouver ou demandez-leur d'exprimer une expression donnée de plusieurs façons équivalentes. Faites-leur également exprimer un rapport trigonométrique en fonction de n'importe quel autre rapport.

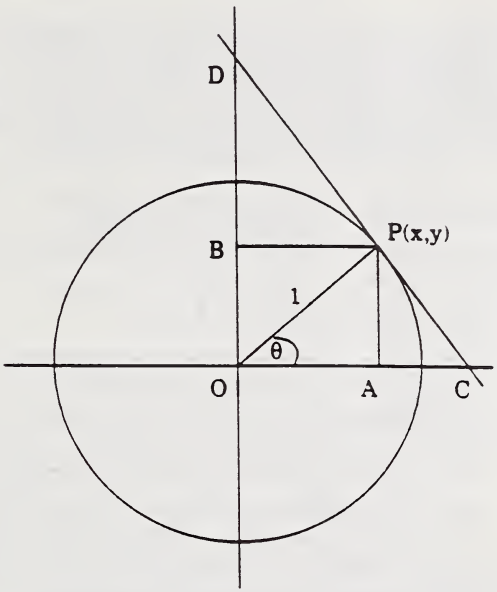
UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Dès qu'on aborde les identités, les élèves doivent être encouragés à se servir de leur calculatrice pour les vérifier en fonction de différentes valeurs pour l'angle, en degrés et en radians.

Demandez aux élèves de tracer, à l'aide de calculatrices graphiques ou d'ordinateurs, le graphique de $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = y$ et de discuter de la signification de ce graphique. Après avoir tracé le graphique de $\sin \theta = y$ et de $\cos \theta = y$ dans les sections ultérieures, il sera utile de discuter de la raison pour laquelle ce graphique est une droite horizontale qui passe par $y = 1$.

ENSEIGNEMENT FACULTATIF

Pour aborder de façon intéressante les rapports trigonométriques et leur relation avec les droites du même nom, il suffit de tracer un angle en position standard dans un cercle unitaire, de même qu'une droite tangente au point terminal du côté image et qui coupe les axes. Il est possible de déterminer les valeurs des six rapports de l'angle en fonction des longueurs des segments sur le diagramme. Pour une explication complète, reportez-vous au Mathematics Teacher, volume 78, numéro 7, octobre 1985.



sin θ = OB
cos θ = OA
tg θ = PC
ctg θ = PD
sec θ = OC
csc θ = OD

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 372 à 303
BMS, 5A : pages 187 à 189, 195 et 196
INF, M534 : pages 244 à 252

CONCEPT 2 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les identités sont des énoncés d'égalité qui sont vrais pour toutes les valeurs de la variable et que les identités trigonométriques sont des équations exprimant des relations entre des fonctions trigonométriques qui sont valables pour toutes les valeurs des variables pour lesquelles les fonctions sont définies.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.2 d'utiliser les identités de l'addition et de la soustraction (formules) :
$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta \cos\phi \mp \sin\theta \sin\phi$;
$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta \cos\phi \pm \cos\theta \sin\phi$.

REMARQUES

Les élèves peuvent vérifier que les formules et identités ci-dessus sont vraies, à l'aide d'une calculatrice et en remplaçant les variables de chaque expression par différentes valeurs. De nouveau, il est possible d'appliquer la fonction trigonométrique des angles positif et négatif (Mathématiques 20) pour développer les identités de l'angle négatif. La dérivation des formules de la somme et de la différence ne fait pas partie intégrante de ce concept, mais ces dérivations constituent un bon sujet pour des activités d'approfondissement. Les élèves doivent prouver les identités de l'arc négatif et de l'arc complémentaire. Pour obtenir un énoncé de la preuve, reportez-vous à la section « Remarques » précédente. La mémorisation des identités de l'arc négatif et de l'arc complémentaire ne sont pas requises car elles peuvent être dérivées à partir des formules de la somme et de la différence.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème : Démontrer que $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta + \sin\phi$ n'est pas une identité. Énoncer un raisonnement logique par écrit.

Pour que l'expression constitue une identité, celle-ci doit être vraie pour toutes les valeurs de θ et ϕ. Remplacez θ et ϕ par différentes valeurs. Si une des paires de valeurs qui sont utilisées ne produit pas un énoncé vrai, alors l'expression n'est pas une identité. Les élèves trouveront une paire de valeurs répondant à ce critère. Il est important pour les élèves de se rendre compte que cette expression n'est pas une identité, même si elle semble en être une.

Problème : Est-ce que $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta + \cos\phi$ est vrai pour n'importe quelles valeurs de θ et ϕ ? Donnez un raisonnement pour votre réponse.

Les élèves peuvent tenter de deviner et faire des essais. Une table de valeurs serait utile pour aider à regrouper les données. Il est

possible d'utiliser un logiciel tableur pour établir cette table de valeurs très rapidement.

Les élèves peuvent se servir d'une calculatrice ou d'un ordinateur pour tracer les graphiques de fonctions comme $y = \cos (60° + \phi)$ et $y = \cos 60° + \cos \phi$ afin de vérifier si ceux-ci s'entrecoupent. D'autres valeurs peuvent être utilisées pour « a ».

Problème : Soit $\sin (\theta - \phi) = \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi$; démontrer que $\sin (-\theta) = -\sin \theta$.

Preuve

$-\theta = 0° - \theta$, donc $\sin (-\theta) = \sin (0° - \theta)$

À l'aide de l'identité de la différence pour sin,

$$\begin{aligned} \sin (0° - \theta) &= \sin 0° \cos \theta - \cos 0° \sin \theta \\ &= (0) \cos \theta - 1 (\sin \theta) \\ &= 0 - \sin \theta \\ &= -\sin \theta. \end{aligned}$$

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

À l'aide de la calculatrice, l'élève peut arriver à déterminer de façon intuitive l'exactitude des formules et des identités. Les logiciels tableurs permettent également aux élèves de générer très rapidement d'importantes tables de valeurs pour vérifier l'exactitude apparente des expressions. Lors de l'utilisation d'un logiciel tableur, il ne faut pas oublier de convertir en radians les mesures exprimées en degrés, car les fonctions trigonométriques des tableurs n'utilisent que les radians.

Les élèves peuvent également tracer, à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice, le graphique de chacun des deux membres de l'identité afin de démontrer que ceux-ci produisent le même graphique.

Tracer le graphique de $y = \sin (-\theta)$ et de $y = -\sin \theta$ par exemple.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

On retrouve, dans différents textes et revues, différentes approches intéressantes aux dérivations des formules de la somme et de la différence.

Voir Mathematics Teacher, volume 83, numéro 2, février 1990, pages 84 à 86 et Mathematics Teacher, volume 75, numéro 1, janvier 1982, pages 10 à 12 pour des variantes intéressantes de ces formules.

Reportez-vous aussi aux ressources indiquées pour les dérivations des formules de la somme et de la différence.

Le développement des formules du demi-arc et de l'arc double constituent des sujets d'approfondissement appropriés.

Les élèves peuvent également développer les formules de la somme et de la différence de la fonction tangente. Voir Mathematics Teacher, volume 82, numéro 5, mai 1989, pages 384 et 385 pour un tel développement.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 389 à 398
BMS, 5A : pages 190 à 195 et 197
INF, M534 : pages 253 à 266

CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il est possible de tracer le graphique des fonctions trigonométriques sur un plan cartésien.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1 tracer le graphique des formes suivantes des fonctions sinus, cosinus et tangente :

$y = a \sin [b(\theta + \phi)] + d$

$y = a \cos [b(\theta + \phi)] + d$

$y = \text{tg } \theta$

3.1.1 se servir d'une calculatrice électronique ou d'un ordinateur pour tracer et analyser les graphiques de fonctions trigonométriques;

3.1.2 examiner, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, l'effet exercé par les paramètres a, b, ϕ et d sur les graphiques des fonctions trigonométriques.

REMARQUES

La transformation des fonctions constitue un sujet de première importance tant en Mathématiques 20 qu'en Mathématiques 33. Il importe d'aider les élèves à se rappeler des effets de a, c et d. Une fois les propriétés de base des graphiques du sinus et du cosinus comprises, on peut demander aux élèves de se remémorer les différents effets exercés par la translation sur la fonction quadratique. Lorsque chaque point est traité, les élèves devraient pouvoir prédire un effet semblable sur les graphiques du sinus et du cosinus. Cela pourra être confirmé ultérieurement par un véritable graphique.

L'effet exercé par b sur la transformation d'un graphique représente un nouveau sujet. Il faut donc tout mettre en œuvre pour permettre aux élèves de comprendre cet effet à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur.

Les élèves doivent pouvoir écrire l'équation correspondant à un graphique donné. Toutefois, de nombreux élèves ont de la difficulté à y arriver. Il s'agit alors de leur indiquer de se concentrer sur une période du graphique qui, de préférence mais pas obligatoirement, débute le plus près possible de l'origine. Demandez-leur de tracer un rectangle autour de cette période. Puis, à l'aide de ce rectangle, il est relativement facile d'identifier l'amplitude, le déphasage, la translation verticale et la période. Dans le cas de la fonction sinus ou cosinus la plus fondamentale, soit :

y = ____ sin ____ (x +/- ____) +/- ____

y = ____ cos ____ (x +/- ____) +/- ____

les élèves doivent pouvoir trouver les valeurs manquantes.

Les élèves doivent également être en mesure de tracer le graphique correspondant à une équation donnée. La plupart des graphiques que les élèves seront appelés à tracer devraient cependant être réalisés à l'aide des moyens techniques mis à leur disposition. Pour connaître une excellente méthode servant à tracer le graphique de la fonction sinus générale, reportez-vous à l'article écrit par John Hornsby[1]. Précisons toutefois que le « B » de M. Hornsby diffère quelque peu du « b » identifié dans ce manuel. Dans un autre article digne de mention[2], des fonctions sont employées pour créer des formes en limitant les domaines. L'exemple utilisé produit une figure de clown. On peut demander aux élèves de produire leurs propres dessins.

Il est possible de représenter de nombreux phénomènes naturels à l'aide des fonctions sinus et cosinus. À titre d'exemple, mentionnons les fluctuations causées par les marées, le courant électrique alternatif, la distance entre le sol et une personne se trouvant dans une grande roue de foire ou longueur du jour par rapport à sa position dans l'année. (Lorsque cela est possible, utilisez la notation de type fonction.) La méthode d'écriture d'une équation qui illustre le mieux la situation consiste à établir une table de valeurs. Celles-ci peuvent être tracées manuellement ou à l'aide d'un logiciel tableur (qui prend en charge le traçage de graphiques). La plupart des tableurs permettent de produire facilement des graphiques comprenant des points de données discrètes. Les graphiques peuvent être présentés de différentes façons, mais le graphique de type « x-y » est celui qui convient le mieux.

Note : Les calculatrices graphiques n'effectuent pas toutes le traçage de ce type de graphique (nuage de points) et la tâche est toujours plus difficile qu'avec un tableur.

Le concept de transformation n'est pas requis pour le graphique de la tangente (autrement dit, les élèves ne sont tenus de tracer le graphique que de $y = tg\ x$). L'élève doit toutefois comprendre ce qui se produit lorsque les valeurs de l'angle se rapprochent des endroits où la tangente n'est pas définie (autrement dit, de tout nombre entier multiple de 90°). Quoique le concept des asymptotes ne soit pas traité en détail dans les Mathématiques 30, il peut être utile d'employer le terme ici et de l'associer à l'étude de l'hyperbole dans le bloc des relations quadratiques.

---

[1] E. John Hornsby Jr., « A Method of Graphing f(x) = Asin (Bx + C) + D. », Mathematics Teacher, janvier 1990, page 51.

[2] Joan M. Iacocca, « Trigonometry and Design », Mathematics Teacher, octobre 1986, page 526.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

L'ouvrage Computer Graphing Experiments 2 (Addison-Wesley) comprend un certain nombre d'activités et de feuilles de travail pouvant être utilisées de concert avec toute technique de traçage de graphiques.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 351 à 354 et 356 à 371
BMS, 5A : pages 166 à 182
INF, M534 : pages 55 à 66 et 227 à 243

CONCEPT 4

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent les méthodes employées pour résoudre les équations trigonométriques.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

4.1 résoudre des équations de premier et de second degré, y compris celles d'angles multiples faisant partie du domaine $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

4.1.1 résoudre, à l'aide d'une calculatrice électronique ou d'un ordinateur, des équations trigonométriques en évaluant les graphiques de fonctions trigonométriques;

4.2 démontrer le rapport entre la solution d'une équation trigonométrique et le graphique de la fonction correspondante.

REMARQUES

Dans le cadre des cours précédents de mathématiques, les élèves ont résolu des équations comme $\sin \theta = 0{,}123\ 4$ pour $\theta = 7{,}1°$. Même si les élèves connaissent les angles de référence ou associés, ils ne les ont peut-être pas appliqués à l'équation ci-dessus (autrement dit, ils n'ont peut-être pas appris comment trouver **deux** valeurs de θ pour lesquelles $\sin \theta = 0{,}123\ 4$).

Il est également possible de résoudre la plupart des équations sous forme de système d'équations.

L'équation $2\sin \theta - 1 = 0$, par exemple, peut être résolue de la façon suivante :

$$2\sin \theta - 1 = 0$$
$$\sin \theta = 1/2$$

Présentez ensuite aux élèves le système suivant :

1 $y = \sin \theta$
2 $y = 1/2$

Les élèves ont maintenant l'occasion d'examiner les intersections du graphique de $\sin \theta$ et de la droite horizontale $y = 1/2$. Cet examen leur permettra sans doute de se rendre compte que les solutions sont en fait les points d'intersection ($\pi/6$ et $5\pi/6$ par exemple).

Dans les cours précédents de mathématiques, les élèves ont étudié la solution d'équations du premier et du second degré. La résolution d'équations trigonométriques leur donne la chance d'utiliser plusieurs des techniques apprises précédemment.

Les élèves doivent pouvoir exprimer les solutions en degrés et en radians. De plus, ils doivent être en mesure de se servir de valeurs

exactes (multiples de $\pi/4$ et $\pi/6$ ou de 30° et 45° par exemple), de même que les angles qui ne sont pas des multiples (32°, 158°, $\pi/5$ et 1,23 rd par exemple).

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème : L'heure à laquelle le soleil se lève à Lethbridge est calculée, en fonction du jour de l'année à l'aide de la formule suivante :

$$h(j) = -1{,}8 \sin 2\pi\frac{(j - 78)}{365} + 6{,}3$$

Note : la calculatrice doit être réglée à « radians ».

D'après cette formule, à quelle heure le soleil s'est-il levé le 10 avril (jour 100) ?
Réponse : le centième jour de l'année, le soleil se lève à 5,634 5 h ou 5 h 38.

Comment modifier la formule afin qu'elle utilise des mesures en degrés ? De même, déterminer quand (à quelle date) le soleil se lèvera à 6 h 30.
Réponse : environ au jour 84 (soit le 25 mars) et au jour 268 (24 septembre).

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

La représentation d'une équation trigonométrique sous forme de système, décrite ci-dessus, peut être approfondie à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur. De plus, une approche de type expérimental faisant usage d'un logiciel tableur peut être utilisée pour estimer et même, dans certains cas, pour résoudre les équations.

La calculatrice sera nécessaire lorsque la réponse n'est pas un multiple de $\pi/6$ ou de $\pi/4$. Tout comme les concepts d'angles associés ou de référence étudiés en Mathématiques 20 et 23 et la règle « CAST », la calculatrice peut être utilisée pour résoudre la plupart des équations trigonométriques. Les élèves doivent prendre connaissance des équivalents décimaux des mesures « exactes » en radians et en degrés, afin de pouvoir les identifier sur leur calculatrice ($\sqrt{3}/2 = 0{,}866\,0\ldots$, $\sqrt{2}/2 = 0{,}707\,1\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$ par exemple).

Problème : Résoudre $4 \sin^2 \theta = 3$ pour $0 \leq \theta < 2\pi$
Solution : $\sin^2 \theta = 3/4$
$\sin \theta = \pm 0{,}866\,0\ldots$, soit approximativement l'équivalent décimal de $\sqrt{3}/2$. Par conséquent, les réponses sont $\pi/3$, $2\pi/3$, $4\pi/3$ et $5\pi/3$.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Ce sujet peut aisément être approfondi et comprendre les équations comprenant deux fonctions dont les solutions s'appuient sur l'emploi des identités. On retrouve des exemples de ces équations sous la forme suivante dans Holtmath 12 :

$$\frac{\cos (90° - \theta)}{1 \cos \theta} = \sqrt{3} \quad \text{et} \qquad \sin \theta = 1 - \cos 2\theta$$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DU TYPE a cos u + b sin u = c

Trois méthodes courantes de résolution de
(1) $a \cos u + b \sin u = c$
sont les suivantes :

- Exprimer l'équation (1) sous la forme $R \cos (u - v) = c$ pour
$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$
et v étant donné par $\text{tg } v = b/a$. Résoudre $R \cos (u - v) = c$.
- Soit $t = \text{tg } u/2$; ainsi,
$$\cos u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
et
$$\sin u = \frac{2t}{1 + t^2}$$
ce qui réduit (1) à l'équation quadratique suivante :
$$a(1 - t^2) + b(2t) = c(1 + t^2).$$
Résoudre t afin d'obtenir u/2 et enfin u.
- Tracer le graphique de $a \cos u + b \sin u = y$ et trouver le point d'intersection avec $y = c$.

Il existe une autre approche, différente de ces méthode,s qui s'adapte à une méthode graphique d'un autre type. Pour résoudre (1), utilisons $\cos u = x$ et $\sin u = y$. Puis,
(i) $x^2 + y^2 = 1$;
l'équation devient alors :
(ii) $ax + by = c$.

Résoudre (i) et (ii) comme une paire d'équations simultanées afin d'obtenir les couples solutions (x, y). Déterminer u à partir de ces couples.

Exemple :

$$\sqrt{3} \cos u + \sin u = 1$$

donne

$$x^2 + y^2 = 1$$

et

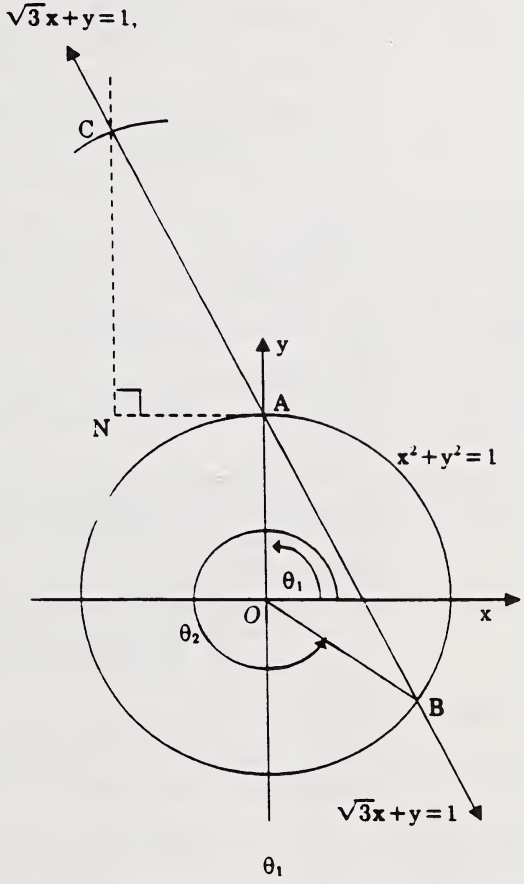


Figure 1 θ_1 et θ_2 sont des solutions

Ainsi,

$$x = \frac{1 - y}{\sqrt{3}}$$

Par conséquent,

$$\frac{(1 - y)^2}{3} + y^2 = 1$$

ou

$$1 - 2y + y^2 + 3y^2 = 3$$

ou

$$4y^2 - 2y - 2 = 0,$$

ce qui donne $y = 1$ ou $-1/2$, les valeurs correspondantes de x étant $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}/2$. Ainsi, $\cos u = 0$ et $\sin u = 1$, ce qui donne $u = 90°$; ou $\cos u = \sqrt{3}/2$ et $\sin u = -1/2$, ce qui donne $u = 330°$. Les équations (i) et (ii) peuvent être résolues graphiquement en traçant le cercle unitaire $x^2 + y^2 = 1$ et la ligne droite $ax + by = c$, puis en lisant les solutions (voir la figure 1).

Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ se trace aisément. A = (0, 1) est un point de la droite $\sqrt{3}x + y = 1$. Un autre point C est obtenu en construisant le $\triangle ANC$ pour AN = 1, $m\angle ANC = 90°$ et AC = 2, ce qui donne $CN = \sqrt{3}$ et une pente de $-\sqrt{3}$.

La solution est constituée des angles θ_1 et θ_2 formés respectivement par les rayons $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ dans la direction positive de l'axe des x.

Note : Pour utiliser la ligne droite $ax + by = c$, il faut connaître deux points sur la droite ou un point et la pente. Lorsque a, b et c sont des nombres rationnels, les points sont déterminés de façon assez précise. Lorsque, comme c'est le cas dans notre exemple, c est rationnel, au moins a ou b est rationnel et l'autre est un radical de la forme $\sqrt{p}$, pour $p \in N$, on arrive à un bon degré de précision en utilisant une construction semblable à celle illustrée pour la droite $\sqrt{3}x + y = 1$.

Tiré de National Council of Teachers of Mathematics, Mathematics Teacher, avril 1989, pages 263 et 264.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 469 à 477
BMS, 5A : pages 213 à 215
INF, M534 : pages 267 à 276

STATISTIQUES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 15 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une distribution bivariée comprend deux variables entre lesquelles un rapport peut exister.	Les élèves devront être en mesure de tracer un ensemble de données bivariées sur un nuage de points. Les élèves devront être en mesure de tracer une droite la mieux ajustée sur un nuage de points en utilisant la méthode des médianes. Les élèves devront développer et utiliser des équations de prédictions de la droite la mieux ajustée afin d'effectuer des inférences démographiques. Les élèves devront déterminer la corrélation apparente entre les variables d'une distribution bivariée d'un nuage de points, y compris la force et la direction de la corrélation. Les élèves devront recueillir, organiser et analyser des ensembles de données bivariées.	Les élèves devront appliquer les processus statistiques et le raisonnement statistique à l'examen des données bivariées.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les données peuvent être distribuées normalement et qu'une distribution normale possède des caractéristiques propres qui peuvent servir à décrire et à analyser de nombreuses situations.	Les élèves devront trouver et interpréter la moyenne et l'écart type d'un ensemble de données distribuées normalement. Les élèves devront appliquer les caractéristiques d'une distribution normale. Les élèves devront trouver et appliquer la courbe standard normale et les notes cotées z de données distribuées normalement.	Les élèves devront calculer, à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs, la moyenne et l'écart type d'ensembles de données distribuées normalement. Les élèves devront résoudre des problèmes comportant des données distribuées normalement. Les élèves devront appliquer les notes cotées z pour résoudre des problèmes faisant appel aux lois de probabilité.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les résultats d'un sondage peuvent être interprétés en fonction d'un degré de confiance mesurable.	Les élèves devront faire la distinction entre une population et un échantillon et déterminer les points forts, les points faibles et les biais d'échantillons donnés. Les élèves devront recueillir et organiser les résultats de sondages de type oui-non réalisés auprès d'échantillons définis. Les élèves devront réaliser des diagrammes à boîte et à moustache à l'aide des résultats provenant d'échantillons multiples. Les élèves devront se servir de diagrammes à boîte et à moustache de 90 % pour trouver l'intervalle de confiance avec lequel les résultats d'un sondage peuvent être interprétés. Les élèves devront tirer des conclusions de nature statistique, effectuer des inférences démographiques et expliquer la confiance avec laquelle ces conclusions et inférences sont effectuées, d'après les résultats de sondages de type oui-non.	Les élèves devront concevoir et réaliser un sondage simple. Les élèves devront recueillir et organiser les résultats d'un sondage simple. Les élèves devront effectuer des recherches sur des échantillons multiples tirés de populations comportant des proportions connues et inconnues de oui. Les élèves devront résoudre des problèmes à l'aide des inférences statistiques. Les élèves devront concevoir et réaliser un sondage sur un échantillon choisi au hasard parmi une population, recueillir et organiser les réponses obtenues, puis analyser les résultats, y compris effectuer des inférences démographiques et évaluer les résultats en fonction du degré de confiance avec lequel ils peuvent être interprétés.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une distribution bivariée comprend deux variables entre lesquelles un rapport peut exister.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 tracer un ensemble de données bivariées sur un nuage de points;

1.2 tracer une droite la mieux ajustée sur un nuage de points en utilisant la méthode des médianes;

1.3 développer et utiliser des équations de prédictions de la droite la mieux ajustées afin d'effectuer des inférences démographiques;

1.4 déterminer la corrélation apparente entre les variables d'une distribution bivariée d'un nuage de points, y compris la force et la direction de la corrélation;

1.5 recueillir, organiser et analyser des ensembles de données bivariées;

1.5.1 appliquer les processus statistiques et le raisonnement statistique à l'examen des données bivariées.

REMARQUES

Dans le cadre du cours de Mathématiques 10, les élèves ont utilisé des données univariées. Il s'agissait de situations dans lesquelles la valeur d'une variable est déterminée pour un groupe donné, la taille des élèves d'une classe par exemple. Les techniques utilisées comprenaient la représentation des données à l'aide de tracés en ligne, de diagrammes en tiges et feuilles et des diagrammes à boîte et à moustache, de même que le calcul de différentes moyennes. Ce concept traite de situations dans lesquelles deux variables sont mesurées pour chaque membre d'un groupe, la taille et le tour de cou de chaque élève d'une classe par exemple. Les données recueillies pour chaque élève peuvent être considérés comme étant un point sur un plan cartésien. Le graphique ainsi produit se nomme un nuage de points et constitue une bonne méthode pour étudier le rapport entre deux variables. Certains rapports peuvent être définis de façon approximative en traçant la droite la mieux ajustée; l'équation de la droite doit alors être déterminée. Il est possible d'utiliser la droite et l'équation pour effectuer des prédictions. Il est important de préciser les limites de ce processus, particulièrement lorsque les données sont extrapolées.

Il existe différentes façons de tracer une droite la mieux ajustée. La méthode la plus couramment décrite est la méthode de la médiane. De nombreuses calculatrices calculent la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite à l'aide de la méthode des « moindres carrés ». Certains logiciels tableurs effectuent également ce type de calcul. Il importe de rappeler que cette unité ne met pas l'accent sur le calcul de nombres. Une fois qu'ils connaissent la pente et

l'ordonnée à l'origine de la droite, les élèves doivent être en mesure de déterminer son équation. Il faut également préciser que la droite ne convient pas à tous les types de données. En effet, le rapport peut s'avérer être curviligne. Les données peuvent également être regroupés en deux blocs et il peut alors être nécessaire de tracer une droite pour chaque accumulation[1].

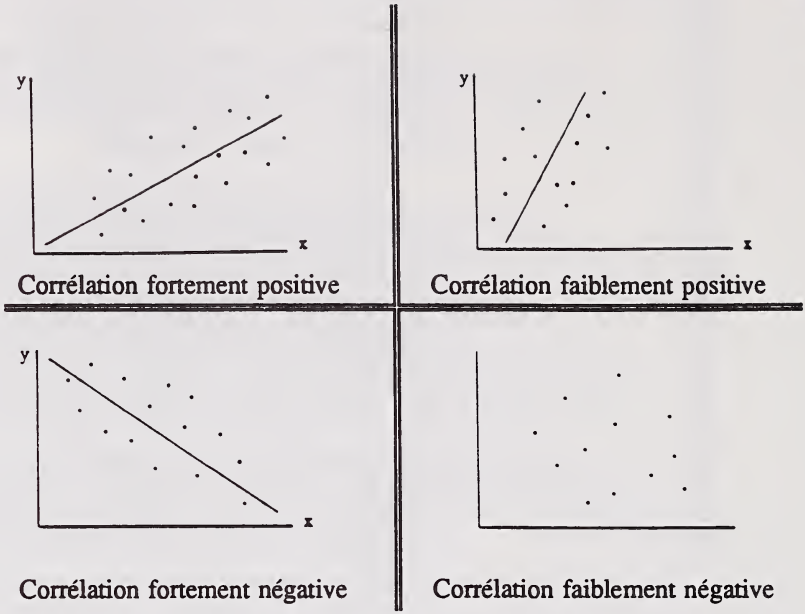
La force et la direction du rapport entre les variables peuvent être résumées à l'aide d'un nombre appelé coefficient de corrélation. Si tous les points figurent exactement sur une droite dont la pente est positive, le coefficient de corrélation est alors de +1. Si les points forment une droite dont la pente est négative, le coefficient de corrélation est de -1. Lorsque le coefficient est de zéro, cela signifie qu'il n'existe aucun rapport entre les variables. Dans la plupart des cas, la valeur du coefficient se situe entre -1 et +1. Lorsque le coefficient est positif, la relation l'est également. Autrement dit, lorsque la valeur d'une variable augmente, la valeur de l'autre augmente aussi. À l'inverse, si le coefficient est négatif, la relation est négative et la valeur d'une variable diminue lorsque la valeur de l'autre augmente. Il n'est pas nécessaire que les élèves calculent le coefficient, à moins qu'ils ne disposent d'un logiciel permettant de le faire rapidement. Il importe surtout de comprendre la signification de ce coefficient du point de vue qualitatif.

La corrélation n'indique aucunement la causalité. En effet, de nombreuses raisons peuvent expliquer la corrélation élevée entre deux variables. Il peut, par exemple, y avoir une corrélation positive entre la quantité de devoirs de mathématiques effectués par un élève et son attitude positive envers le sujet. Il peut toutefois être faux d'affirmer qu'un surplus de devoirs suscitera chez l'élève une attitude encore plus positive envers les mathématiques. Pour un examen plus approfondi de ce sujet, reportez-vous à l'ouvrage de Campbell, Flaw and Fallacies[2].

---

[1] James Landwehr, Exploring Data : Quantitative Literacy Series, 1986, page 133.

[2] Stephen Campbell, Flaws and Fallacies in Statistical Thinking, Prentice Hall, 1974, page 152.



Le document « NCTM Standards[3] » propose un certain nombre de points qui s'appliquent à la présente unité. Les élèves doivent s'efforcer de poser des questions sur leur environnement. Les exemples fournis doivent porter sur des données réelles et non fictives. Les projets doivent faire partie intégrante du processus d'apprentissage et d'évaluation. L'accent doit être mis **non pas** sur la capacité de calculer une ou plusieurs valeurs, mais plutôt sur l'analyse et la communication de nombres et d'idées.

Une excellente façon d'aborder ce sujet consiste à demander aux élèves d'identifier des variables qui peuvent révéler un rapport positif et négatif. Il peut, par exemple, y avoir un rapport positif entre le nombre d'heures d'étude et la note obtenue à un examen ou entre la taille d'un homme et celle de son fils. À l'inverse, le rapport entre le nombre d'heures travaillées après l'école et les notes obtenues en classe peut s'avérer négatif. Les élèves doivent examiner ces types de rapports en recueillant des données et en traçant des nuages de points.

[3] National Council of Teachers of Mathematics, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Preston, VA, page 105.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Demandez aux élèves de consulter les almanachs ou les annuaires de statistiques publiés annuellement afin de recueillir des renseignements sur différents pays. La grande quantité de données obtenues peut leur suggérer une théorie sur le rapport (positif ou négatif) qui existe entre deux variables.

Exemples : les précipitations et le produit national brut;
la population et la pollution;
l'aire et la population.

Examiner ce rapport et préparer une présentation. Cela peut également faire l'objet d'un projet de groupe.

Activité 2 : Demandez aux élèves de s'informer auprès du directeur de l'école au sujet des présences en classe à différentes journées, puis de téléphoner au bureau de météorologie pour connaître la température moyenne de chacun de ces jours. Existe-t-il une corrélation entre ces données ? Est-il possible de prédire la présence en classe si on connaît la température ?

Activité 3 : Les sports professionnels regorgent de statistiques. Chaque jour, la section des sports des journaux offre un grand nombre de possibilités d'examen des relations entre des variables. Les annuaires de statistiques contenant les résultats de l'année précédente sont en vente dans les kiosques à journaux.

Exemples : hockey - buts marqués en désavantage numérique (buts pour et contre);
buts marqués (pour et contre);
points au classement et minutes de pénalité;
football - verges en offensive et points marqués;
baseball - points marqués et nombre de coups sûrs.

Activité 4 : Demandez aux élèves de noter de façon précise, depuis le début de l'année scolaire, le nombre d'heures qu'ils mettent à terminer chaque unité. Il s'agit ensuite de déterminer s'il existe une corrélation avec les notes obtenues à ces unités.

Activité 5 : Présentez aux élèves un raisonnement statistique qui prédit leur note finale pour le cours. D'après les résultats obtenus par les élèves des années précédentes aux cours de Mathématiques 20 et Mathématiques 30, par exemple, les élèves actuels peuvent prédire leur note finale pour ce cours. Demandez aux élèves d'analyser ce raisonnement.

Activité 6 : Demandez aux élèves de recueillir des données univariées sur chaque élève de la classe. Il importe d'associer le nom de l'élève à chaque valeur recueillie. Il est conseillé d'utiliser une grande variété de données.

Exemples :
- la note obtenue à une dictée rédigée par l'expérimentateur;
- le nombre de lancers francs réussis, sur 10, avec un ballon mousse de basket-ball;
- combien chaque élève peut-il nommer de nains (« Blanche-Neige et les sept nains »);
- la précision lorsqu'on demande de deviner le nombre de bonbons dans un bocal;
- le nombre de microsillons, de disques compacts ou de cassettes que possède chaque élève.

Chaque élève doit résumer les résultats de ses recherches à l'aide des techniques associées aux données univariées. On peut ensuite afficher données et les résumés sur les murs de la classe, puis demander aux élèves d'examiner la possibilité de deux rapports entre ces données :

1. Un rapport qui, selon eux, démontre un coefficient de corrélation très positif ou très négatif (soit près de +1 ou de -1). La note obtenue à la dictée, par exemple, et le nombre de « nains » peuvent dénoter une corrélation élevée.

2. Un rapport qui d'après eux possède un coefficient de corrélation très petit (soit près de zéro).

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les calculatrices scientifiques et les logiciels tableurs sont conçus spécialement pour calculer les coefficients de corrélation et les équations de droites les mieux ajustées. Les calculatrices graphiques et certains logiciels tableurs permettent de produire rapidement un nuage de points représentant les données.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5 : pages 437 à 459

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les données peuvent être distribuées normalement et qu'une distribution normale possède des caractéristiques propres qui peuvent servir à décrire et à analyser de nombreuses situations.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 trouver et interpréter la moyenne et l'écart type d'un ensemble de données distribuées normalement;
- 2.1.1 calculer, à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs, la moyenne et l'écart type d'ensembles de données distribuées normalement;

2.2 appliquer les caractéristiques d'une distribution normale;
- 2.2.1 résoudre des problèmes comportant des données distribuées normalement;

2.3 trouver et appliquer la courbe standard normale et les notes cotées z de données distribuées normalement;
- 2.3.1 appliquer les notes cotées z pour résoudre des problèmes faisant appel aux lois de probabilité.

REMARQUES

De nombreux faits présentent des caractéristiques qui sont distribuées normalement. À titre d'exemple, on peut mentionner la taille, le poids, le quotient intellectuel et les temps de réaction des gens. La mesure répétée d'une quantité produit des valeurs qui sont distribuées normalement (reportez-vous à l'activité 1).

Même si deux distributions possèdent la même moyenne, une d'entre elles peut s'avérer plus « plate ». Cette variabilité de la dispersion peut être illustrée par la comparaison de résultats comme ceux de l'activité 1. Le problème consiste à mesurer la dispersion (voir l'activité 2). En règle générale, la dispersion est mesurée à l'aide de l'étendue et de l'écart type. La notion d'écart type est souvent difficile à saisir au début et il peut s'avérer utile de demander aux élèves de l'estimer avant de la trouver à l'aide de la calculatrice (voir l'activité 3). Les élèves doivent apprendre comment calculer l'écart type à l'aide de la formule, mais l'accent doit être mis sur l'utilisation d'une calculatrice possédant des fonctions statistiques.

Les sondages Gallup, les fabricants d'ampoules électriques, les fabricants d'automobiles et les sondages Nielsen se servent tous d'échantillons pour tirer des conclusions concernant une population beaucoup plus vaste. La moyenne et l'écart type d'échantillons choisis au hasard sont en relation étroite avec ceux de la population d'où ils sont tirés. La moyenne de l'échantillon ($\bar{X}$) est généralement considérée comme étant une bonne approximation de

la moyenne de la population (μ). La plupart des calculatrices font la distinction entre l'écart type de l'échantillon et de la population (s et σ respectivement). Lorsqu'on se sert d'un échantillon pour estimer l'écart type d'une population, l'écart type de la population est utilisé. Si l'échantillon est en fait constitué de la population en entier, l'écart type de la population est utilisé (voir l'activité 4).

Les applications de la courbe standard normale et des tables de probabilité associées sont nombreuses. Celles-ci sont très bien décrites dans les ouvrages inscrits au programme.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Demandez aux élèves de mesurer leur temps de réaction à l'aide d'une règle métrique. L'élève garde sa main au-dessus du bord du pupitre et attrape la règle qu'un autre élève laisse tomber. La distance de la chute est prise en note. Notez environ 20 mesures pour chaque élève. Assurez-vous que chaque « expérience » est réalisée de façon identique. À l'aide d'un diagramme en tiges et feuilles, on devrait obtenir une courbe, ressemblant à une cloche, ce qui est caractéristique de la distribution normale. Notez la mesure moyenne de chaque élève et répétez le diagramme en tiges et feuilles pour toute la classe.

Note : Les élèves qui ont étudié la physique devraient être en mesure de convertir la distance en temps, à l'aide d'une calculatrice et de la formule qui suit. Il est toutefois plus facile d'utiliser les distances.

> $s = 0{,}5 \times 980 \times t^2$, s étant la distance en centimètres, 980 l'accélération, en cm/s^2, causée par la gravité et t le temps de réaction en secondes.

Activité 2 : Pour chaque ensemble de données, calculer la moyenne, la médiane et l'étendue.

N°1 → 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
N°2 → 10 43 46 49 52 58 61 64 67 100
Comparer et opposer ces deux ensembles de données.

Note : L'élève devrait être en mesure de comprendre l'importance d'avoir d'autres mesures de dispersion que celles de l'étendue après cette activité.

Activité 3 : De façon générale, la moyenne plus ou moins l'écart type doit comprendre **approximativement** les deux tiers des données recueillies. Estimez l'écart type des données suivantes.

14 15 18 20 21 23 24 25 25 26 26 27 30 31 32 32 33 35

Réponse : La moyenne est d'environ 25,4. Les deux tiers des données représentent un total de 12 nombres sur les 18. Cela signifie que nous devons inclure environ six nombres provenant de chaque côté de 25,4, à savoir les nombres de 20 à 32. Une façon d'effectuer l'estimation consiste à prendre la moitié de la différence entre ces nombres, ce qui donne (32 - 20) / 2 ou 6. La vraie réponse sera souvent très différente de cette estimation, mais cette règle peut servir de guide pour la compréhension du concept et peut s'avérer pratique pour détecter les erreurs qui sont souvent causées par l'opérateur (lors de l'entrée).

Activité 4 : Découpez chacun des 200 carrés de la figure 1. Les nombres représentent une population dont la moyenne est de 50 et l'écart type de est 10. Choisissez au hasard des échantillons de 10 nombres chacun et calculez la moyenne et l'écart type de ces échantillons. Comparez-les avec la moyenne et l'écart type de la population.

Note : Il serait peut être préférable de laminer les pages avant de découper les carrés, car ils ont tendance à se coller ensemble.

Problème : Si vous désirez vraiment avoir très chaud durant vos vacances, préférez-vous visiter le pays A ou le pays B ? Expliquez votre raisonnement.

PAYS	TEMPÉRATURE MOYENNE	ÉCART TYPE DE TEMPÉRATURE
A	22 °C	5 °C
B	25 °C	8 °C

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5 : pages 363 à 386

RESSOURCES SUPPLÉMENTAIRES

Against all Odds : Inside Statistics
a. Normal Distributions (program 4)
b. Normal Calculations (program 5)

Cette série de vidéocassettes est disponible chez ACCESS et montre de nombreuses applications de la DISTRIBUTION NORMALE. Ces cassettes montrent des hommes et des femmes qui se servent des mathématiques dans leurs emplois.

Figure 1

27	28	29	30	31	32	32	33	33	34	34		35	35	35
36	36	36	37	37	37	38	38	38	38	39	39	39	39	39
40	40	40	40	40	41	41	41	41	41	42	42	42	42	42
42	43	43	43	43	43	43	44	44	44	44	44	44	44	45
45	45	45	45	45	45	46	46	46	46	46	46	46	46	47
47	47	47	47	47	47	47	48	48	48	48	48	48	48	48
49	49	49	49	49	49	49	49	50	50	50	50	50	50	50
50	51	51	51	51	51	51	51	51	52	52	52	52	52	52
52	52	53	53	53	53	53	53	53	53	54	54	54	54	54
54	54	54	54	55	55	55	55	55	55	55	56	56	56	56
56	56	56	57	57	57	57	57	57	58	58	58	58	58	58
59	59	59	59	59	60	60	60	60	60	61	61	61	61	62
62	62	62	63	63	63	64	64	64	65	65	65	66	66	67
67	68	68	69	70	71	72	73							

CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les résultats d'un sondage peuvent être interprétés en fonction d'un degré mesurable de confiance.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1. faire la distinction entre une population et un échantillon et déterminer les points forts, les points faibles et les biais d'échantillons donnés;

3.2. recueillir et organiser les résultats de sondages de type oui-non réalisés auprès d'échantillons définis;

3.2.1 concevoir et réaliser un sondage simple;

3.2.2 recueillir et organiser les résultats d'un sondage simple;

3.3. tracer des diagrammes à boîte et à moustache à l'aide des résultats provenant d'échantillons multiples;

3.3.1 effectuer des recherches sur des échantillons multiples tirés de populations comportant des proportions connues et inconnues de oui;

3.4. se servir de diagrammes à boîte et à moustache de 90% pour trouver l'intervalle de confiance avec lequel les résultats d'un sondage peuvent être interprétés;

3.4.1 résoudre des problèmes à l'aide des inférences statistiques;

3.5 tirer des conclusions de nature statistique, effectuer des inférences démographiques et expliquer la confiance avec laquelle ces conclusions et inférences sont effectuées, d'après les résultats de sondages de type oui-non;

3.5.1 concevoir et réaliser un sondage sur un échantillon choisi au hasard parmi une population, recueillir et organiser les réponses obtenues, puis analyser les résultats, y compris effectuer des inférences démographiques et évaluer les résultats en fonction du degré de confiance avec lequel ils peuvent être interprétés.

REMARQUES

Ce concept comprend la conception et l'interprétation des sondages. Une façon adéquate d'introduire ce concept consiste à présenter aux élèves des exemples de sondages réalisés par les médias d'information. Quoiqu'il existe différents types de sondages, ce concept ne porte que sur ceux du type « OUI-NON ». Les répondants n'ont alors que deux choix de réponse : *oui* et *non.*

Les questions qui suivent conviennent à un sondage de type « OUI-NON » :

a. Avez-vous obtenu une moyenne de plus de 80 % l'an dernier ?

b. Aimez-vous la musique « rap » ?

Les questions ci-dessous ne conviennent pas à un sondage de type « OUI-NON » :

a. Quelle a été votre moyenne l'an dernier ?

b. Réagissez à l'énoncé suivant en encerclant une réponse : « J'aime la musique rap ».

Approuve tout à fait	Approuve	Neutre	Désapprouve	Désapprouve tout à fait

Les sondages font partie intégrante des statistiques effectuées par déduction. Le but est de déduire quelque chose, habituellement la moyenne d'un grand groupe (appelé population), en recueillant des informations à partir d'un sous-ensemble de ce groupe que l'on appelle échantillon. Un des problèmes que l'on rencontre est qu'un échantillon choisi au hasard ne représente pas toujours le population de façon exacte (voir l'activité 1).

Un sondage effectué à partir d'un échantillon de 20 pourrait sélectionner huit fumeurs au hasard. Jusqu'à quel point la conclusion de ce sondage selon laquelle 40 % de la population fume est-elle exacte (c'est-à-dire 8 personnes sur 20 = 40 %) ? Si les experts devraient affirmer que la moyenne est de 40 % ± 10 % dans neuf cas sur dix, une personne qui lirait le sondage aurait alors une meilleure indication des limites de l'information. Cette information « supplémentaire » est appelée intervalle de confiance à 90 % de la moyenne. Cela signifie que si l'on a réalisé le sondage 10 fois, alors neuf fois sur dix la moyenne des gens qui fument dans le sondage se situerait entre 6 et 10 (soit entre 30 % et 50 % si l'échantillon est de 20 personnes). Un des problèmes majeurs qui doit être résolu dans ce concept est la détermination des intervalles de confiance.

La détermination des intervalles de confiance nécessite un retour en arrière. L'accent sera mis sur une population dont on connaît le nombre de « oui ». Dans une pièce dans laquelle se trouvent 40 fumeurs et 60 non-fumeurs, le choix de dix personnes au hasard ne donnera pas toujours quatre fumeurs et six non-fumeurs. Une simulation représente une méthode efficace pour introduire la notion d'intervalle de confiance.

Une table de nombres choisis au hasard peut être utilisée pour simuler un échantillon de 10 tiré d'une population connue dont 40 % des personnes fument. Si les chiffres 0, 1, 2 et 3 représentent des « oui » et que tous les autres chiffres représentent des non-fumeurs, alors de nombreux échantillons peuvent être établis rapidement à l'aide de la table. De nombreux manuels donnent la

liste des programmes informatiques qui produiront des milliers d'échantillons en quelques minutes.

Voici un exemple de simulation informatisée.

Pourcentage de la population qui a répondu oui : 40 %
Taille de l'échantillon : 10
Nombre d'échantillons analysés = 1 000

nombre de oui	fréquence	proportion de l'échantillon	probable ou non probable
0	3	0	non probable
1	45	0,10	non probable
2	115	0,20	probable
3	224	0,30	probable
4	240	0,40	probable
5	195	0,50	probable
6	129	0,60	probable
7	35	0,70	non probable
8	13	0,80	non probable
9	1	0,90	non probable
10	0	1,00	non probable

Notes : * Proportion de l'échantillon = $\frac{\text{nombre de oui}}{\text{taille de l'échantillon}}$

* On peut prévoir la fréquence de chaque classe en utilisant la formule de la distribution binomiale, car le sondage de type « OUI-NON » est en fait une expérience binomiale. Les élèves n'emploient pas toujours cette formule, mais elle pourrait s'avérer utile pour l'enseignant lorsque vient le temps de vérifier les simulations.

$$\text{fréquence} = \frac{N \times n!(p^y) \times (1 - p)^{n - y}}{y!(n - y)!}$$

N représentant le nombre d'échantillons utilisés, n la taille de chaque échantillon, y le nombre de « oui » dans l'échantillon et p le pourcentage de la population qui a répondu par « oui ».

Pour notre simulation, par exemple, N = 1 000, n = 10, p = 0,40 et 7 est une valeur arbitraire de y.

Ainsi :

$$\text{fréquence} = \frac{1\,000 \times 10!(0{,}40^7)(0{,}60)^3}{7!3!} = 42{,}26$$

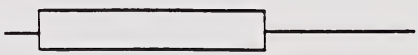
* Il existe des tables de distribution binomiale. La plupart donneront la probabilité d'un certain nombre de « oui » pour chaque taille d'échantillon.

Le programme d'études se concentre sur des intervalles de confiance de 90 %. Pour ce faire, 90 % des valeurs (900 sur 1 000) sont identifiées comme probables. Puis, soit au début ou à la fin, 5 % des valeurs sont notées pour représenter le nombre de réponses non probables. La fréquence totale de ces valeurs est de « 3 + 45 + 35 + 13 + 1+ 0 » ou 98. Cela représente environ 10 % des simulations effectuées. La fréquence totale des autres valeurs est de 902, ce qui représente environ 900 des simulations effectuées. Par conséquent, pour une population dont 40 % des gens ont répondu « oui » et dont la taille de l'échantillon est de 10, vous devez vous attendre à trouver, pour un échantillon, un nombre de « oui » qui varie entre deux et six, dans 90 % des cas.

Un diagramme à boîte et à moustache peut être utilisé pour résumer cette table. La boîte peut contenir 90 % des valeurs et les moustaches, 5 %. On appelle ce type de diagramme diagramme à boîte et à moustache de 90 %. Les moustaches ne doivent jamais représenter plus de 5 % des valeurs. Les proportions de l'échantillon pour lesquelles le « oui » est probable sont situées à l'intérieur ou sur les extrémités de la boîte. Dans le cas de cette simulation, les proportions pour lesquelles une réponse affirmative est probable se situent entre 0,2 et 0,6, en utilisant un intervalle de confiance de 90 %.

PROPORTION DU NOMBRE DE OUI
DANS L'ÉCHANTILLON

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0



Tous les manuels contiennent des diagrammes à boîte et à moustache de 90 % pour différentes tailles d'échantillons. Ces diagrammes, tout comme celui qui précède, sont conçus pour des populations dont le nombre de réponses affirmatives varie entre 0 % et 100 %. La construction d'une de ces tables peut être donnée en guise de projet de classe.

Les élèves ont déjà acquis de l'expérience avec des diagrammes à boîte et à moustache qui utilisent la médiane, donc des tracés en boîte de 50 %. Cela signifie que la boîte comprend 50 % des valeurs et les lignes, 25 %.

Ce diagramme à boîte et à moustache de 90 % sert à établir un intervalle de confiance de 90 % pour les sondages. Si vous réalisez un sondage avec un échantillon dont la taille est de 20, par exemple, vous vous fierez au diagramme établi pour cette taille. Si vous avez noté huit « oui » pour votre échantillon de 20, alors la proportion de votre échantillon est de 40 %. Toutefois, vous désirez connaître le pourcentage de la population qui a répondu par « oui ». Un échantillon dont la proportion des réponses affirmatives est de 40 % surviendra probablement pour de nombreuses variétés de populations. En trouvant 0,4 sur la première rangée du diagramme et en traçant une ligne verticale, il est facile de constater que 0,4 est une proportion d'échantillon pour des populations qui possèdent entre 25 % et 60 % de réponses affirmatives. Par conséquent, les résultats du sondage doivent être donnés de la façon suivante : 40 % ± 15 %, neuf fois sur dix.

Ce concept doit être évalué en grande partie à partir de la conception et de l'évaluation d'un sondage. L'accent doit être mis sur l'environnement des élèves et on devrait prendre le temps de répondre aux questions qui les intéressent. Tous les efforts devraient être déployés afin d'obtenir un échantillon vraiment représentatif et d'être en mesure d'identifier tout biais qui peut modifier les résultats.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : En guise d'introduction aux sondages et à la terminologie qui s'y rapporte, posez une question à toute la classe. La question devrait être du genre « oui-non ».

a. Aimez-vous regarder le football américain à la télévision ?
b. Avez-vous étudié pendant plus d'une heure hier soir ?
e. Est-ce que votre famille possède un lecteur de disques compacts ?

Calculez le pourcentage de « oui » pour la classe. Choisissez ensuite cinq élèves au hasard et recueillez leurs réponses pour la même question; calculez la moyenne de l'échantillon de cinq. Comparez la population et la moyenne de l'échantillon. Répétez cette opération avec de nombreux échantillons.

Activité 2 : Demandez aux élèves de choisir des sondages parmi ceux qui sont publiés par les journaux et les revues. Notez ceux qui sont du type « oui-non », ainsi que leurs résultats. Portez une attention particulière à l'intervalle de confiance.

Activité 3 : Demandez aux élèves de concevoir ensemble un diagramme à boîte et à moustache de 90 % à partir d'un échantillon de taille 20. Chaque équipe de deux élèves peut utiliser un pourcentage différent de population qui a répondu « oui » en se servant d'un échantillon choisi au hasard. Ces échantillons peuvent être construits à l'aide de diverses techniques, comme une génératrice de nombres choisis au hasard, que l'on retrouve sur certaines calculatrices, ou encore des tables de nombres choisis au hasard, un programme informatique ou même une tige mobile terminée en pointe et pivotant sur un cadran. Un cadran pour une population ayant répondu « oui » dans 40 % des cas peut, par exemple, être constitué d'un cercle divisé en 10 sections, dont quatre de ces sections sont identifiées par « oui » et les six autres par « non ».

Activité 4 : Demandez aux élèves de construire un diagramme à boîte et à moustache de 95 % pour des échantillons de taille 20 et pour une population qui a répondu « oui » dans 40 % des cas. Comparez avec le diagramme à boîte et à moustache de 90 %. On peut également utiliser les simulations faites précédemment. Dans une simulation utilisant 1 000 essais, environ 50 essais sont identifiés comme non probables et les 950 du « centre » sont identifiés comme probables. Pour avoir confiance dans la réponse à 95 %, on doit augmenter l'étendue des valeurs possibles.

Autres activités : Pour obtenir une série d'activités, d'idées et de stratégies d'enseignement, reportez-vous à l'ouvrage Exploring Surveys and Information from Samples[4].

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Comme il a été mentionné précédemment, il existe dans cette unité d'apprentissage une calculatrice. Certains logiciels tableurs possèdent même une génératrice de nombres au hasard. Elles peuvent être utilisées pour simuler diverses populations.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

[4] James Landwehr et al., Exploring Surveys and Information from Samples, Dale Seymour Publications, Palo Alto, Californie, 1987.

RELATIONS QUADRATIQUES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 10 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent les propriétés physiques des sections coniques formées par l'intersection d'un plan et d'un cône.	Les élèves devront être en mesure de décrire la section conique formée par l'intersection d'un plan et d'un cône.	Les élèves devront être en mesure d'identifier le point de dégénérescence de chacune des coniques.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que la relation quadratique générale $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ est la représentation algébrique de toute conique.	Les élèves devront être en mesure de décrire les coniques qui peuvent être formées par diverses combinaisons de valeurs des coefficients numériques.	Les élèves devront être en mesure d'examiner et de décrire l'influence qu'exercent les coefficients numériques sur les graphiques de relations quadratiques, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent l'influence qu'exercent les coefficients numériques sur la relation quadratique générale $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, pour $B = 0$, sur la courbe des coniques résultantes.	Les élèves devront être en mesure d'analyser les graphiques d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles, d'après leurs équations.	Les élèves devront être en mesure d'utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour tracer les graphiques d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles. Les élèves devront être en mesure de reconnaître quelles sont les conditions nécessaires pour qu'une ellipse devienne un cercle. Les élèves devront être en mesure d'examiner et de décrire l'influence qu'exercent les coefficients numériques sur l'orientation, la grandeur et la forme du graphique.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'un lieu géométrique est un ensemble de points qui satisfait à une condition donnée.	Les élèves devront être en mesure de reconnaître que chaque conique peut être décrite comme un lieu géométrique de points.	Les élèves devront être en mesure d'utiliser la définition de lieu géométrique pour vérifier les équations qui décrivent des coniques. Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui comportent l'analyse et la détermination des caractéristiques d'un corps qui suit une trajectoire conique. Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui comportent l'analyse et la détermination des caractéristiques d'une surface conique.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que toute conique peut être décrite comme un lieu géométrique de points, de sorte que le rapport entre la distance d'un point de cette conique à un point fixe et la distance entre le même point et une droite fixe est une constante. Ce rapport est appelé excentricité.		

REMARQUES GÉNÉRALES

Cette façon d'enseigner les relations quadratiques sera très différente pour les enseignants qui sont habitués à la pratique en vigueur jusqu'à septembre 1991. Cette nouvelle approche suit de près le modèle suggéré dans Professional Standards for the Teaching of Mathematics, NCTM, 1991. Elle comporte la participation des élèves à la cueillette des données, de même qu'à la formulation d'hypothèses et de conclusions. Les élèves devront recueillir et enregistrer les données, formuler des hypothèses et tester ces hypothèses afin d'acquérir une compréhension des relations quadratiques. Les élèves édifieront leurs connaissances des relations quadratiques par l'expérimentation et l'exploration, en utilisant une approche en laboratoire.

Comme l'accent est mis sur l'expérimentation et l'observation, il sera difficile d'atteindre les objectifs de cette unité sans l'utilisation de la technologie disponible comme support pour parvenir à tracer le graphique des relations quadratiques. Il n'y a aucun intérêt à ce que les élèves passent beaucoup de temps à tracer les graphiques sur papier. Les calculatrices graphiques, ou les ordinateurs pour lesquels on aura choisi un logiciel adéquat, seront nécessaires pour mettre en pratique l'expérimentation proposée sur les graphiques des coniques. Il est souhaitable que ces outils technologiques soient utilisés lors de l'évaluation tout autant que lors de l'enseignement de cette unité d'apprentissage. Toutes les activités d'apprentissage et les stratégies d'évaluation partent du principe selon lequel les élèves ont accès à une technologie graphique souhaitable.

Cette section du Guide d'enseignement pour les relations quadratiques est plus détaillée que les autres unités, car il n'y a que très peu de ressources disponibles dans les ouvrages de référence. Les activités et les approches suggérées englobent tous les concepts jusqu'aux niveaux requis. Les activités sont développées en présumant que les concepts sont enseignés dans le même ordre qu'ils sont présentés dans le nouveau programme d'études.

Les activités destinées aux élèves sont présentées séparément afin qu'elles puissent être photocopiées. Les activités guident les élèves dans leur exploration de ce concept. La section « **Processus et contexte de résolution de problèmes** » comprend la raison d'être de chaque activité et certains résultats auxquels les élèves peuvent arriver.

En plus de la méthode d'évaluation traditionnelle, les enseignants devraient également évaluer les élèves à l'aide de projets et de travaux écrits, de présentations orales, d'examens sans durée de temps limite ou d'une combinaison des moyens énumérés ci-dessus. On doit accorder plus d'importance à la représentation graphique et

à la formulation d'hypothèses en rapport avec ces graphiques, et moins d'importance aux calculs algébriques. L'évaluation et les stratégies d'enseignement doivent refléter cet objectif.

« Les élèves doivent avoir l'occasion de concevoir des figures en trois dimensions et de travailler avec elles afin de pouvoir développer des aptitudes spatiales qui sont fondamentales dans la vie quotidienne et dans de nombreuses carrières. Des modèles physiques et d'autres objets du monde réel doivent être utilisés afin de donner aux élèves une base solide qui leur permettra de développer leur intuition géométrique qu'ils pourront ensuite utiliser lorsqu'ils travailleront avec des notions abstraites[1] ». Les activités sont développées avec la certitude que les élèves acquerront leurs propres connaissances par l'expérience et que l'apprentissage est formateur lorsqu'il débute par des expériences concrètes, en passant par des expériences visuelles pour aboutir à la formation de notions abstraites. Ces activités permettront également aux élèves d'établir des rapports entre les différents niveaux.

[1] National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, 1989, page 157.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent les propriétés physiques des sections coniques formées par l'intersection d'un plan et d'un cône.

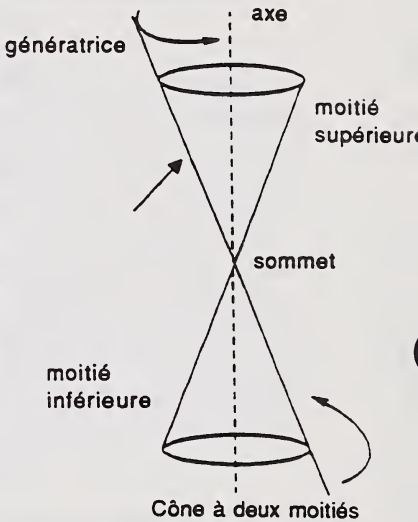
Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 décrire la section conique formée par l'intersection d'un plan et d'un cône;

1.1.1 identifier le point de dégénérescence de chacune des coniques.

REMARQUES

En l'an 200 avant Jésus-Christ, le mathématicien grec Apollonius fut le premier à étudier les courbes produites par l'intersection d'un plan et d'un cône circulaire droit à deux moitiés. Ces moitiés se prolongent indéfiniment dans les deux directions. Elles peuvent être formées par la rotation d'une droite oblique (appelée génératrice) autour d'un axe. L'intersection d'un plan et d'un cône à deux moitiés forme une section conique.



PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

La page d'activités destinée aux élèves comprend des activités qui peuvent être utilisées pour l'étude de ce concept. Le but de ces activités est de donner l'occasion aux élèves de découvrir les formes de base des sections coniques, puis d'explorer et d'accroître leur compréhension par l'écriture. Les activités progressent en commençant par le concret pour terminer avec des notions abstraites, en passant par le visuel.

Dans l'activité 1.1 et l'activité 1.2, de nombreux élèves trouveront trois formes de base. Ils n'arriveront pas à distinguer une parabole d'une hyperbole, mais ils devraient être en mesure de reconnaître un cercle et une ellipse. Certains élèves arriveront à distinguer entre une version « étroite » et une version « large » d'un même type de conique. Dans l'activité 1.1, les conditions qui forment chaque conique devraient être l'angle de la lumière projetée par une lampe de poche sur un mur, tandis que dans l'activité 1.2, les conditions devraient se rapporter à l'angle de la coupe d'un cône. À l'activité 1.2, il est recommandé de se servir de gobelets à boire de forme conique ou de modèles coniques formés à partir de pâte à modeler.

Certains élèves qui font l'activité 1.3 se rendront compte qu'il existe en fait quatre formes différentes. La seule différence qu'ils peuvent remarquer entre une hyperbole et une parabole est l'angle du plan relatif à l'axe du cône, qui forme cette hyperbole et cette parabole.

Une fois l'activité 1.3 terminée, les élèves peuvent se demander pourquoi il y a quatre formes.

En terminant l'activité 1.4, ils devraient être en mesure de différencier la parabole de l'hyperbole. De nombreuses informations nécessaires pour terminer cette activité sont disponibles pour les élèves dans les ouvrages inscrits au programme.

Lors de l'évaluation des réponses données par les élèves pour les activités 1.5 et 1.6, les informations suivantes représenteraient une parfaite compréhension des concepts qui s'y rattachent.

> Si le plan de coupe passe par les deux moitiés, la courbe de l'intersection est appelée hyperbole. Lorsque le plan passe par le sommet du cône, l'hyperbole dégénère en une paire de droites sécantes.
>
> Si le plan de coupe est parallèle à la génératrice et qu'il ne passe pas par le sommet, la courbe résultante est une parabole. Lorsque le plan passe par le sommet du cône et qu'il est parallèle à la génératrice, la parabole dégénère en une droite.
>
> Si le plan de coupe passe par une seule moitié et qu'il n'est pas parallèle à la génératrice, la courbe de l'intersection est appelée ellipse. Un cercle est formé lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe du cône et, de ce fait, il représente le cas limite d'une ellipse. Lorsque le plan passe par le sommet du cône, l'ellipse ou le cercle dégénère en un point.

ACTIVITÉS DESTINÉES AUX ÉLÈVES

Activité 1.1 : Dans une pièce noire, allumer une lampe de poche et décrire la forme du rayon. Décrire les différentes formes qui sont produites lorsque le rayon de lumière est dirigé contre le mur. En plaçant un morceau de papier sur le mur, il est possible de tracer les formes.

Activité 1.2 : Couper, à l'aide d'un couteau aiguisé, un cône dans un morceau de polystyrène expansé. Décrire la forme des différentes surfaces qui en résultent. Quelles sont les conditions qui ont produit chacune des formes ?

Activité 1.3 : Démonter le cône modèle de l'enseignant et tracer les courbes qui en résultent. Décrire les conditions qui ont produit chacune des formes.

Activité 1.4 : Tracer un cône à deux moitiés et démontrer les positions des plans d'intersection qui produisent chacune des différentes coniques.

Activité 1.5 : Rédiger un paragraphe qui résume les conditions qui produisent chacune des coniques.

Activité 1.6 : Lorsqu'un plan coupe un cône à deux moitiés, la courbe résultante peut ne pas être un cercle, une parabole, une ellipse ou une hyperbole. Les points et les droites résultants sont appelés des coniques dégénérées. Décrire les conditions qui produisent ces coniques dégénérées. Il existe plus d'une conique dégénérée.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T1 : pages 171 à 173
MS4, 01, T2 : pages 147 à 152, 194, 209 à 212 et 229 à 233

Ressources supplémentaires

INF, M534 : pages 297 et 334
BMS, 5B : pages 114 et 115

Vidéocassette

For All Practical Purposes, The Stand-up Conic (disponible chez ACCESS, numéro de catalogue : VC289819).
Cette cassette est une bonne introduction aux coniques, mais elle aborde des sujets qui ne font pas partie du programme. La cassette vidéo donne des exemples où l'on utilise des sections coniques comme la conception des ailes d'avions, de lentilles télescopiques, de ponts suspendus et de phares.

Articles

1. David Atkinson, *Spheres in a Cone*, ou *Proving the Conic Sections*, The Mathematics Teacher, mars 1987, pages 182 à 187.
   Cet article établit le lien entre une coupe plane d'un cône et les définitions des géométriques des sections coniques.
2. Clark Kimberling, *Conics*, The Mathematics Teacher, mai 1984, pages 363 à 367.
   Cet article démontre comment l'utilisation des ordinateurs peut améliorer l'enseignement des coniques.

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que la relation quadratique générale $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ est la représentation algébrique de toute conique.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 décrire les coniques qui peuvent être formées par diverses combinaisons de valeurs des coefficients numériques;

2.1.1 examiner et décrire l'influence qu'exercent les coefficients numériques sur les graphiques de relations quadratiques, à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

REMARQUES

Cette façon d'enseigner les sections coniques est nouvelle et tout à fait différente de celle utilisée en Mathématiques 30, au cours de la période précédant septembre 1991. L'accent est maintenant mis sur les notions mathématiques engendrées par la recherche et la découverte et non par des calculs mathématiques. Cette méthode ne suit pas le calcul plus conventionnel pour les sommets, les directrices, les foyers, l'axe majeur et mineur, mais elle met plutôt l'accent sur la recherche du lieu géométrique en tenant compte des coefficients A, B, C, D, E et F de l'équation générale. Cette méthode donnera aux élèves suffisamment d'expérience pour leur permettre de comprendre quelles conditions sont requises pour produire les différentes coniques.

Comme les ouvrages inscrits au programme tendent à suivre une méthode plus conventionnelle, il sera nécessaire, afin d'atteindre les objectifs de ce concept, de consulter d'autres ressources.

Grâce à la recherche et à l'exploration libre, les élèves découvriront certains principes de base relatifs aux lieux géométriques d'une relation quadratique générale. On doit accorder de l'importance à la recherche et à l'exploration faites par les élèves et non aux calculs arithmétiques spécifiques. Il sera difficile d'atteindre les objectifs de cette unité d'apprentissage si l'on ne crée pas une atmosphère de classe qui répond aux conditions nécessaires à la recherche et à l'exploration actives des élèves.

Comme cette méthode est nouvelle et qu'elle est basée sur la recherche des élèves, les enseignants devront penser à des stratégies d'évaluation de ce concept, tout en respectant les objectifs de la recherche libre et en utilisant la technologie disponible.

Au cours de Mathématiques 20, les élèves ont étudié la parabole et ont vu les techniques de représentations graphiques sur ordinateur

qui étaient utiles à la recherche de ce lieu géométrique. Ce concept élargit le processus de recherche afin d'y inclure toutes les coniques engendrées par la formule générale. On s'attend à ce que les élèves explorent et fassent des recherches en utilisant la technologie mise à leur disposition.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 2.1 : Cette activité est utile pour les élèves qui n'ont jamais expérimenté la technologie graphique. Cela permet de pratiquer l'entrée des graphiques en termes de coefficients A, B, C, D, E et F. On peut discuter des résultats afin de s'assurer que les élèves ont tous trouvé le même graphique. Les élèves qui ont déjà quelque expérience de la technologie graphique peuvent être exemptés de cette activité.

Activité 2.2 : Cette activité se poursuit avec l'étude de ce concept en demandant aux élèves de suggérer des valeurs pour A, B, C, D, E et F, puis de les tracer afin de voir à quoi ressemble le lieu géométrique. On devrait accorder suffisamment de temps à la représentation graphique afin que les élèves se sentent à l'aise lorsque vient le temps de tracer le graphique d'une conique, à l'aide des outils technologiques disponibles, et de décrire le lieu géométrique. On devrait encourager les élèves à indiquer sur un tableau les coefficients, les équations et les graphiques obtenus afin qu'ils puissent s'y reporter facilement.

Activité 2.3 : Cette activité est un préliminaire à l'étude de ce concept. Afin que les élèves arrivent à penser à certaines possibilités, l'enseignant peut leur demander de tracer le graphique de certaines équations présélectionnées. On a choisi une des équations de l'activité 2.1 dont on a changé un des coefficients. Lorsque les graphiques auront été tracés et compilés, on pourrait discuter des similitudes et des différences qui sont apparentes et la façon dont celles-ci pourraient être liées aux équations. Il est à noter que les conjectures émises par les élèves sont basées sur des exemples limités et devraient s'élaborer à mesure que l'étude progresse.

Ce processus d'études dirigées devrait éclairer les élèves quant à la façon d'examiner les concepts et leur donner certaines idées qu'ils voudront vérifier par eux-mêmes.

Alors que l'on devrait accorder beaucoup de temps à la recherche libre de lieux géométriques, certains élèves trouveront peut-être instructif le fait que les enseignants guident la recherche avec des questions du genre ET SI.

Activité 2.9 : Les élèves recherchent l'influence qu'exerce le coefficient B. (Il est à noter que l'influence de B est complexe et peut conduire à une discussion très intéressante de classe ou de groupe).

Activités 2.10 à 2.13 : On donne un graphique aux élèves et on leur demande de trouver les coefficients qui pourraient produire cette courbe. Ces questions ne possèdent pas de solutions uniques.

Activités 2.14 à 2.19 : Posez des questions qui pourraient être données à des fins de recherche.

Une solution possible de l'activité 2.14 est donnée aux pages 95 à 98.

Pour l'évaluation de ce concept, on pourrait donner aux élèves des coefficients et leur demander de tracer le graphique, ou on pourrait leur donner un graphique et leur demander de trouver les valeurs des coefficients qui produiraient ce graphique. Dans les deux cas, les élèves devraient être en mesure d'utiliser les outils de la technologie graphique. Une autre forme d'évaluation pourrait comprendre une étude ou un projet dans lequel un élève présenterait ses recherches et où il tirerait des conclusions à l'aide des résultats obtenus.

RÉSUMÉ DE L'ACTIVITÉ 2.14

Problème : Quelles sont les figures possibles lorsque A et C sont égaux et que B peut changer ?

Cueillette de données

Puisque nous évaluons A, B et C, je laisse D et E égaux à 0. D et E influenceront la forme de la courbe (voir l'activité 2) mais ne changeront pas la sorte de courbe.

Je laisse A et C égaler 1. Si vous augmentez les valeurs de A et C, on obtient la même figure mais les courbes sont plus petites.

J'ai fait l'essai sur 12 graphiques pour en arriver à tirer mes conclusions.

Conclusions

En changeant les coefficients, il est possible de produire un point, une droite, deux droites parallèles, une hyperbole et une ellipse.

Si $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ forme un trinôme carré parfait, alors il en résultera une ou des droites. Si F est égal à 0, alors on obtiendra une seule droite. Si F est tout autre nombre négatif, on obtiendra deux droites avec l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine égales à la racine carrée de F. Si F est positif, on n'obtiendra pas de courbe.

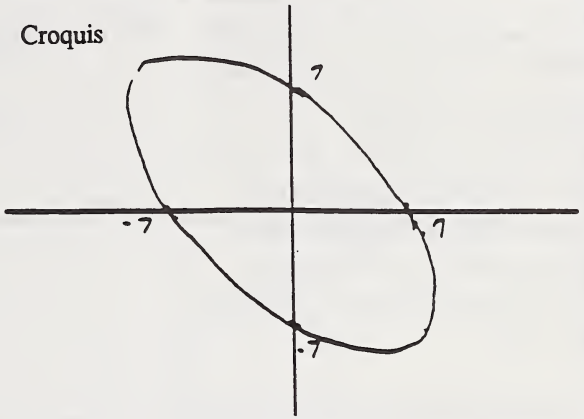
Si la valeur absolue de B est inférieure au double de la racine carrée de A multiplié par la racine carrée de C, la courbe formera alors une ellipse.

Si la valeur absolue de B est supérieure au double de la racine carrée de A multiplié par la racine carrée de C, la courbe formera alors une hyperbole.

ctivité :

A = 1 B = 1 C = 1 D = 0 E = 0 F = -49
Équation : $x^2 + xy + y^2 - 49 = 0$

Croquis

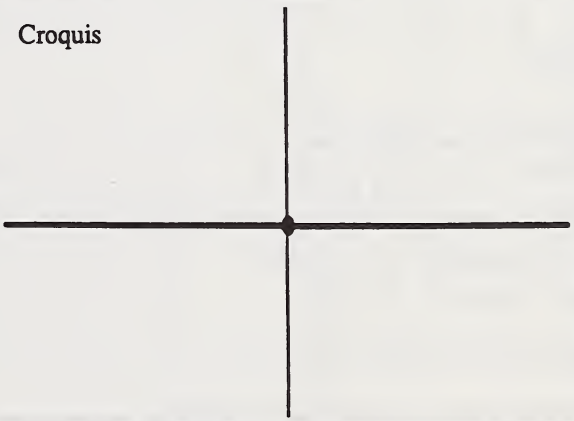


Observations et conjectures

Pour tester A, B et C, Soit D et E = 0
Forme d'une ellipse
L'abscisse et l'ordonnée à l'origine sont égales
La forme a effectué une rotation autour de l'axe
Le centre est situé à l'origine (0,0)

A = 1 B = 1 C = 1 D = 0 E = 0 F = 0
Équation : $x^2 + xy + y^2 = 0$

Croquis

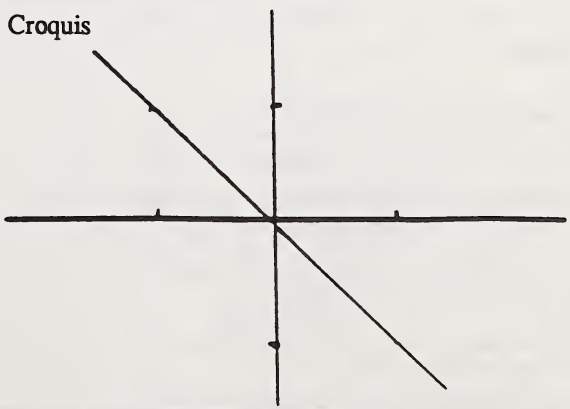


Observations et conjectures

Point
Pour $x = 0$, $y^2 = 0$
Pour $y = 0$, $x^2 = 0$
Difficile à voir sur le graphique

A = 1 B = 2 C = 1 D = 0 E = 0 F = 0
Équation : $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

Croquis



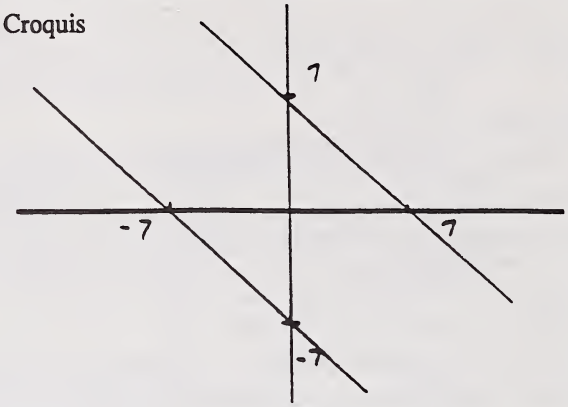
Observations et conjectures

Une droite
$x^2 + 2xy + y^2$ est un carré

Activité :

A = 1 B = 2 C = 1 D = 0 E = 0 F = -49
Équation : $x^2 + 2xy + y^2 - 49 = 0$

Croquis

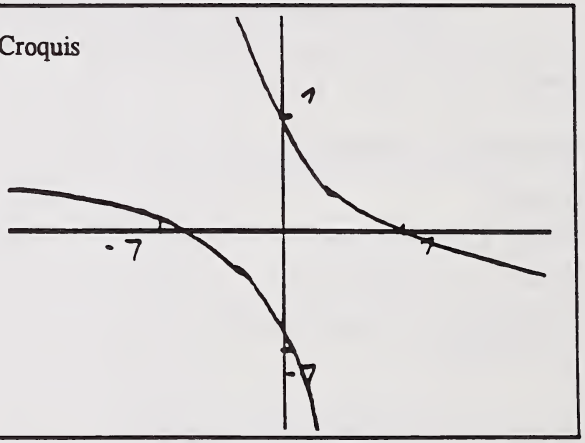


Observations et conjectures

Deux droites parallèles
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont des racines carrées de |F|

A = B = C = D = E = F =
Équation

Croquis

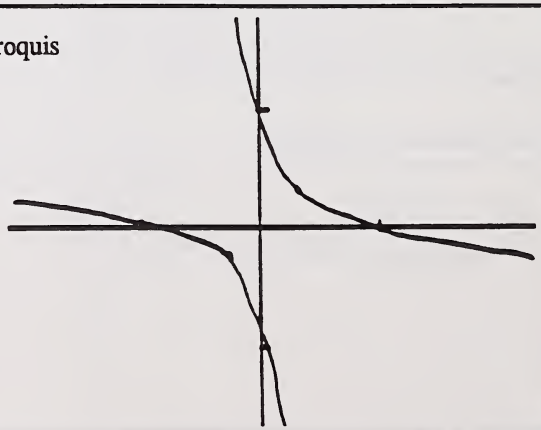


Observations et conjectures

Forme d'une hyperbole
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont égales à $\sqrt{F}$
Essayer ensuite : B > 3

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Croquis



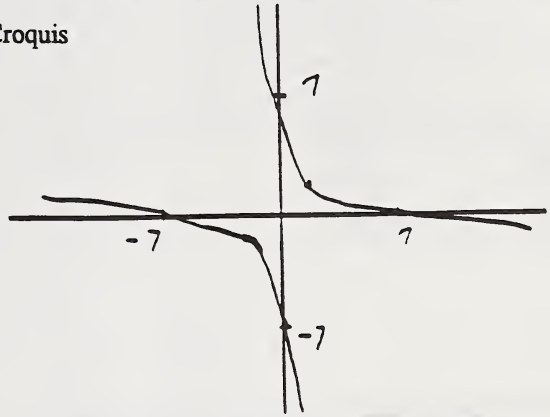
Observations et conjectures

Forme d'une hyperbole
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont égales à $\sqrt{F}$
La courbe se rapproche de l'axe des x et de l'axe des y
Essayez une plus grande valeur pour B

tivité :

A = 1 B = 8 C = 1 D = 0 E = 0 F = −49
Équation : $x^2 + 8xy + y^2 - 49 = 0$

Croquis

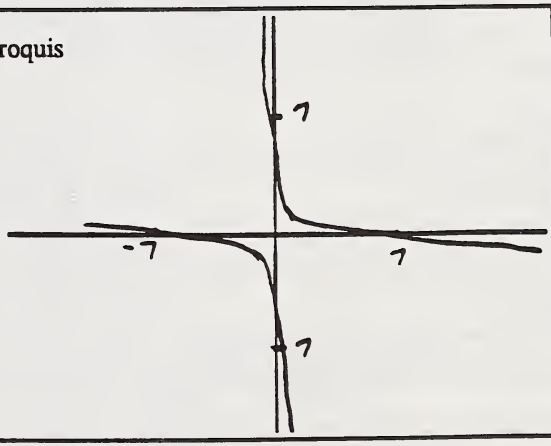


Observations et conjectures

Forme d'une hyperbole
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont plus près de l'axe x et de l'axe des y
Essayez une plus grande valeur pour B

A = 1 B = 16 C = 1 D = 0 E = 0 F = −49
Équation : $x^2 + 16xy + y^2 - 49 = 0$

Croquis

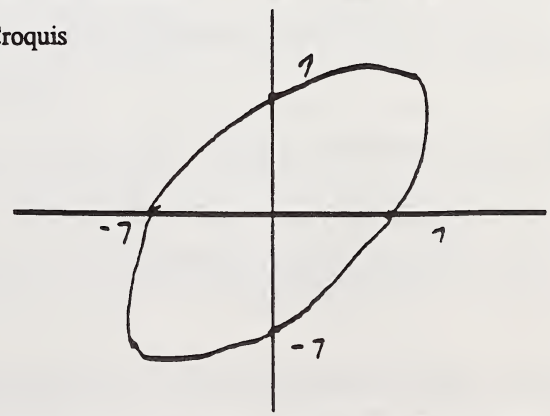


Observations et conjectures

Forme d'une hyperbole
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont égales
La courbe approche une limite à mesure que B augmente. Elle se rapproche de l'axe des x et de l'axe des y.
Essayez une valeur négative pour B

A = 1 B = −1 C = 1 D = 0 E = 0 F = −49
Équation :

Croquis



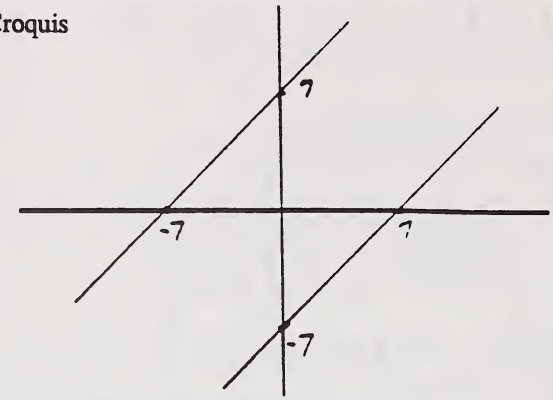
Observations et conjectures

Forme d'une ellipse
Effectue une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont égales
La direction de la rotation change lorsque la valeur de B est négative

Activité :

A = 1 B = 2 C = 1 D = 0 E = 0 F = −49
Équation : $x^2 + 2xy + y^2 - 49 = 0$

Croquis

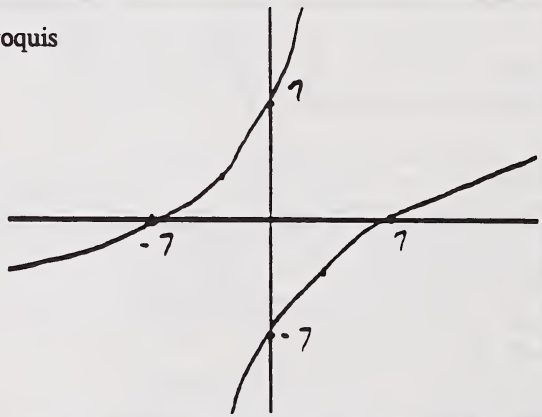


Observations et conjectures

Droites parallèles
Pente positive

A = 1 B = −3 C = 1 D = 0 E = 0 F = −49
Équation : $x^2 - 3xy + y^2 - 49 = 0$

Croquis

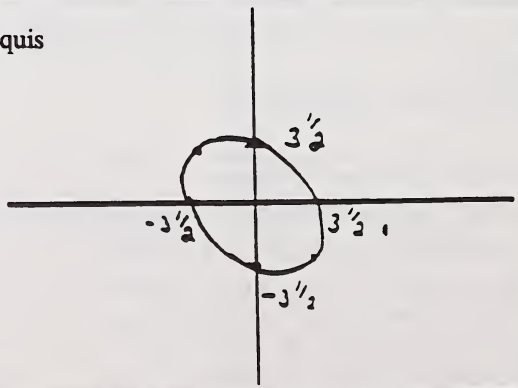


Observations et conjectures

Hyperbole
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont égales
Rotation dans le sens des aiguilles d'une montre

A = 4 B = 4 C = 4 D = 0 E = 0 F = −49
Équation :

Croquis



Même forme mais plus petite
L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont égales, soit $\sqrt{49/4}$

ACTIVITÉS DESTINÉES AUX ÉLÈVES

Activité 2.1 : En utilisant la technologie graphique disponible, représenter graphiquement les relations suivantes. Inscrire les résultats sur des feuilles de données que vous pourrez utiliser en guise de référence. Quelles sont les sortes de courbes créées par chacune de ces relations. De quelle façon ces courbes différentes sont-elles reliées aux coefficients ?

a. $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 40 = 0$
b. $4x^2 + y^2 + 4x + 8y - 3 = 0$
c. $x^2 - y^2 + 4x + 8y - 16 = 0$
d. $x^2 + 4x + 6y - 1 = 0$
e. $x^2 + xy + y^2 + 4x + 8y - 16 = 0$
f. $2x^2 + xy + 2x - 25 = 0$

Activité 2.2 : On a pris une équation de l'activité 2.1b) et on a systématiquement changé le coefficient D. Déterminer l'influence exercée par le changement de D sur le graphique. Inscrire les résultats sur une feuille de données et résumez les effets de ce changement.

a. $4x^2 + y^2 + 8x + 8y - 3 = 0$
b. $4x^2 + y^2 + 4x + 8y - 3 = 0$
c. $4x^2 + y^2 + 16x + 8y - 3 = 0$
d. $4x^2 + y^2 - 8x + 8y - 3 = 0$
e. $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 3 = 0$
f. $4x^2 + y^2 - 4x + 8y - 3 = 0$

Activité 2.3 : Soit l'équation $x^2 + xy + Cy^2 + 4x + 2y - 25 = 0$. Qu'arrive-t-il à la courbe si l'on change le coefficient C ?

Activité 2.4 : Quelles sont les figures possibles selon l'équation donnée : $Ax^2 + 4x - 2y - 20 = 0$?

Activité 2.5 : Choisir une autre équation de l'activité 2.1 et choisir un coefficient pour expérimenter. Qu'arrive-t-il à la courbe lorsque le coefficient est changé ?

Activité 2.6 : Chercher la forme de la courbe lorsque A et C sont égaux et que $B = 0$. Quelles sont les sortes de figures possibles ?

Activité 2.7 : Chercher la forme de la courbe lorsque A et C ne sont pas égaux et que $B = 0$. Quelles sont les sortes de figures possibles ?

Activité 2.8 : Résumer les sortes de figures qui sont possibles lorsque B est égal à zéro.

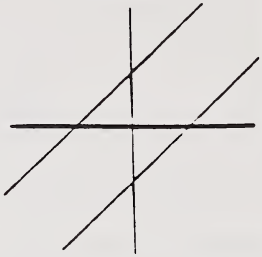
Activité 2.9 : Choisir une des figures de l'activité 2.7. Quel est le changement apporté à chacune des figures lorsque B n'est pas égal à zéro ?

Activité 2.10 : Quelle combinaison de coefficients donne ce point géométrique ?

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Observations et conjectures

Croquis

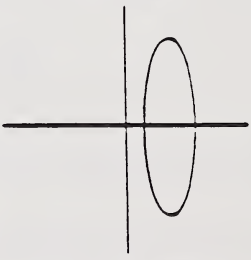


Activité 2.11 : Quelle combinaison de coefficients détermine cette courbe ?

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Observations et conjectures

Croquis



Activité 2.12 : Quelle combinaison de coefficients détermine cette courbe ?

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Observations et conjectures

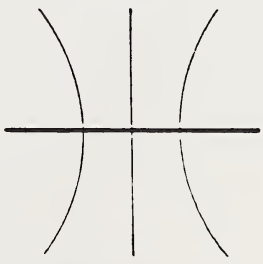
Croquis

Activité 2.13 : Quelle combinaison de coefficients détermine cette courbe ?

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Observations et conjectures

Croquis



Activité 2.14 : Quelles sont les figures possibles lorsque A et C sont égaux et que B peut changer de valeur ?

Activité 2.15 : Rechercher la relation qui existe entre le type de la courbe et la valeur de $B^2 - 4AC$.

Activité 2.16 : Quelles sont les figures possibles pour :
$Ax^2 + Cy^2 + 4x + 4y - 40 = 0$?

Activité 2.17 : Rechercher l'influence exercée par B sur le graphique d'une ellipse.

Activité 2.18 : Examiner $3x^2 + 4y^2 + 6x + 8y + F = 0$ afin de déterminer pour quelles valeurs de F il est impossible d'obtenir un graphique.

Activité 2.19 : Concevoir un problème qui suit le modèle « Qu'arrive-t-il si... ? » et vérifier les conjectures à l'aide de la technologie graphique.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les élèves doivent avoir l'occasion d'utiliser une calculatrice graphique ou un ordinateur et un logiciel adéquat, ou les deux.

Les calculatrices graphiques et les ordinateurs donnent maintenant aux élèves la possibilité de tracer des graphiques rapidement, de faire des conjectures, de vérifier celles-ci en traçant de nouveaux graphiques et de tirer des conclusions.

Pour les calculatrices graphiques, les équations de graphiques devront être entrées sous la forme y suivante :

$$y_1 = \frac{-1(Bx + E) + \sqrt{((Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F))}}{2C}$$

$$y_2 = \frac{-1(Bx + E) - \sqrt{((Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F))}}{2C}$$

On peut maintenant obtenir un graphique complet en assignant des valeurs à A, B, C, D E et F.

Les programmes graphiques éliminent le besoin de calculer les foyers, la directrice et les sommets. Jusqu'à récemment, ces points servaient à obtenir rapidement une esquisse du graphique.

Pour obtenir la liste complète des programmes qui représentent graphiquement une relation quadratique générale, reportez-vous à l'annexe, aux sections suivantes :

Calculatrices à fonctions graphiques :
TI-81 page 174
Casio 7700G page 176

Ordinateurs personnels :
MS-DOS page 177
Apple II page 179

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

Computer Graphing Experiments 3
Conic Sections
Addison-Wesley Publishing Company

Master Grapher and 3D Grapher
Addison-Wesley Publishing Company

IBM Tool Kit

Zap a Graph
Brain Waves
RP #1 Fitzroy Harbour, Ontario
K0A 1X0

CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent l'influence qu'exercent les coefficients numériques sur la relation quadratique générale $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, pour $B = 0$, sur la courbe des coniques résultantes.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1 analyser les graphiques d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles, d'après leurs équations;

- 3.1.1 utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour tracer les graphiques d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles;
- 3.1.2 reconnaître quelles sont les conditions nécessaires pour qu'une ellipse devienne un cercle;
- 3.1.3 examiner et décrire l'influence qu'exercent les coefficients numériques sur l'orientation, la grandeur et la forme du graphique.

REMARQUES

Au concept 2, les élèves ont cherché quelle était l'influence exercée par la variation du coefficient « B » sur la forme des graphiques de différentes coniques. Ils ont trouvé que « B = 0 » donne normalement un graphique qui possède un axe de symétrie vertical et horizontal.

Dans les pages d'activités destinées aux élèves, on y retrouve de nombreuses suggestions de recherches ou de problèmes.

Activités 3.1 à 3.7 : Ces activités peuvent être données comme des devoirs à faire en groupe. La clé de ces recherches est que les élèves commencent par plusieurs séries de coefficients et de graphiques. En recherchant un modèle, il est possible d'émettre une conjecture qui devrait être vérifiée à l'aide d'une autre série de coefficients. À l'aide d'une série de petites étapes, ils peuvent répondre à une question plus complexe.

Les élèves n'ont pas à faire toutes les activités comprises entre l'activité 3.8 et 3.17. Ce sont des exemples de recherches qui peuvent être effectuées par les élèves. Une façon d'évaluer les élèves consiste à leur demander de suggérer et de compléter leurs propres recherches. Dans certaines de ces activités, il y aura peut-être des élèves qui désireront utiliser leurs connaissances sur la transformation des fonctions enseignées en Mathématiques 20. Une hyperbole centrée à l'origine, par exemple, est $16x^2 - 4y^2 - 144 = 0$).

En remplaçant « x » par « x - 3 » et « y » par « y + 5 », le centre de l'hyperbole est maintenant (3, -5). On obtient l'équation $16(x - 3)^2 - 4(y + 5)^2 - 144 = 0$. En simplifiant cette expression, l'élève peut déterminer les valeurs des coefficients « A » à « F ».

Activités 3.18 à 3.11 : Ces activités sont des problèmes portant sur l'analyse des caractéristiques des sections coniques. Il existe de nombreuses façons de trouver les équations de coniques qui satisfont à certaines conditions. Les solutions algébriques sont possibles, MAIS on devrait encourager les élèves à formuler des hypothèses qu'ils pourraient ensuite vérifier. Dans les ouvrages inscrits au programme, on retrouve d'autres questions de ce genre qui pourraient être utilisées.

En terminant l'activité 3.19, par exemple, les élèves utiliseront peut-être un système de coordonnées dans lequel l'origine sera située au point où la balle est relâchée ou encore à la base de la falaise. Les élèves aborderont peut-être cette question en utilisant les concepts développés dans l'unité d'apprentissage portant sur les fonctions quadratiques du cours de Mathématiques 20. Ils écriront peut-être une équation de forme générale telle que $y = ax^2 + b$. Les valeurs de « a » et de « b » pourraient être trouvées algébriquement ou par la formulation d'hypothèses.

Une autre façon de trouver la solution comporte l'utilisation de la forme générale de la parabole $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. Si l'origine du système de coordonnées est située à la base de la falaise, alors les points (0, 30) et (55, 0) doivent être sur la courbe. Certains élèves se rendront peut-être compte que le sommet de la parabole doit être situé au point où la balle a été relâchée. Si cela n'est pas le cas, plusieurs paraboles passant par deux points pourraient être trouvées. En changeant systématiquement les coefficients, on pourrait en arriver à une solution.

ACTIVITÉS DESTINÉES AUX ÉLÈVES

Note : Toutes les activités utilisent la relation quadratique générale $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, dans laquelle « b = 0 ».

Activité 3.1 : Quelles restrictions doit-on appliquer à la relation quadratique générale pour obtenir une parabole ?

Activité 3.2 : Quelles restrictions doit-on appliquer pour obtenir une ellipse ?

Activité 3.3 : Quelles restrictions doit-on appliquer pour obtenir une hyperbole ?

Activité 3.4 : Par quel changement du coefficient une ellipse se transforme-t-elle en un cercle ?

Activité 3.5 : Quelles restrictions doit-on appliquer aux coefficients pour obtenir une parabole dont le sommet est à l'origine ?

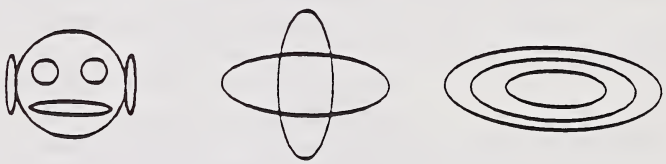
Activité 3.6 : Quelles restrictions doit-on appliquer aux coefficients pour qu'une ellipse, une hyperbole ou un cercle soient centrés à l'origine ?

Activité 3.7 : Résumer les conclusions que vous avez tirées aux activités 3.1 à 3.6.

Activité 3.8 : Soit $x^2 + 4y^2 + Dx + Ey - 16 = 0$; trouver les valeurs de D et de E pour lesquelles le centre de l'ellipse se trouve dans le deuxième quadrant.

Activité 3.9 : Soit $Ax^2 + Cy^2 + 4x + 6y = 0$; comment pourrait-on comparer A et C si le plus grand axe de l'ellipse était l'axe horizontal ?

Activité 3.10 : Concevoir des équations et les représenter graphiquement en les superposant afin qu'elles ressemblent à une des illustrations ci-dessous.



Activité 3.11 : Trouver l'équation d'une ellipse qui n'a pas d'ordonnées ni d'abscisses à l'origine et qui se situe dans le quatrième quadrant.

Activité 3.12 : Trouver l'équation d'une parabole dont le sommet est situé dans le troisième quadrant et qui est ouverte à la partie supérieure.

Activité 3.13 : Trouver l'équation d'une hyperbole centrée dans le deuxième quadrant.

Activité 3.14: Quelle combinaison de coefficients donne une hyperbole qui possède un axe de symétrie horizontal ?

Activité 3.15 : Selon l'équation d'une hyperbole donnée, quels changements doit-on effectuer sur les coefficients pour obtenir une « nouvelle » hyperbole ayant une ouverture plus large mais le même centre ?

Activité 3.16 : Selon l'équation donnée d'une parabole, quels changements doit-on effectuer sur les coefficients pour obtenir une « nouvelle » parabole ayant une ouverture plus étroite et possédant le même sommet ?

Activité 3.17 : Selon l'équation donnée d'une parabole, quels changements doit-on effectuer pour obtenir une « nouvelle » parabole qui soit l'image invertie de l'originale et qui ait le même sommet ?

Activité 3.18 : Trouver l'équation d'une ellipse qui passe par le point (3, 4).

Activité 3.19 : Du haut d'une falaise de 33 mètres, une balle a été lancée horizontalement et a suivi une trajectoire parabolique. La balle a atterri à 55 m de la base de la falaise. Trouver une équation pour la trajectoire adoptée par la balle.

Activité 3.20 : Au cours d'un match de football, un botteur tente d'effectuer un botté de précision (3 points) d'une distance de 35 verges. La barre située au-dessus des poteaux du but se trouve à une hauteur de 3,5 verges. Le ballon doit dépasser les bras levés des joueurs de la ligne défensive de l'équipe adverse, situés à 7 verges du but et doit atteindre une hauteur de 3,5 verges. Supposons que le ballon atterrit 7 verges derrière le but. Trouver l'équation de la trajectoire parabolique du ballon qui a tout juste réussi à dépasser les joueurs de la ligne défensive qui avait les bras levés et la barre supérieure des buts. Trouver également la hauteur maximale du ballon au cours de la trajectoire. (Note : Dans un match de football, on mesure les longueurs en « verges » et non en unités SI, soit le mètre.)

Activité 3.21 : Une remorque mesure 3,4 m de largeur. L'entrée d'un pont couvert situé sur le chemin Royal a la forme d'une demi-ellipse dont la largeur mesure 8,0 m et la hauteur 5,0 m.

a. Si la remorque est tirée en passant par le centre de l'entrée, quelle est alors la hauteur maximale de la remorque ?

b. Si la circulation est à deux sens dans le pont recouvert, quelle est la hauteur maximale de la remorque ?

CONCEPT 4

Les élèves devront être en mesure de comprendre qu'un lieu géométrique est un ensemble de points qui satisfait à une condition donnée.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

4.1 reconnaître que chaque conique peut être décrite comme un lieu géométrique de points;

- 4.1.1 utiliser la définition de lieu géométrique pour vérifier les équations qui décrivent des coniques;
- 4.1.2 résoudre des problèmes qui comportent l'analyse et la détermination des caractéristiques d'un corps qui suit une trajectoire conique;
- 4.4.3 résoudre des problèmes qui comportent l'analyse et la détermination des caractéristiques d'une surface conique.

REMARQUES

Dans ces concepts, les définitions de lieux géométriques sont des conditions géométriques qui décrivent un ensemble de points. On donnera aux élèves des exercices où ils devront représenter graphiquement les coniques. De ces graphiques, ils écriront une règle ou une définition du lieu géométrique. Des activités subséquentes permettront de passer de la définition du lieu géométrique à l'équation de la courbe. Une fois l'équation obtenue, l'élève devrait être en mesure de vérifier la règle en choisissant certains points sur le lieu géométrique.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Les trois premières activités sont tirées du travail fait par les élèves dans les cours de Mathématiques 10 et 20. On les a incluses dans cette section afin de rappeler aux élèves que les trajectoires suivies par les points peuvent être décrites par certaines règles qui déterminent tous les points de la courbe.

Activités 4.4 à 4.6 : Ces activités sont tirées d'un des manuels approuvés par le ministère. On demande aux élèves de construire une parabole, une ellipse et une hyperbole. Les élèves doivent écrire une règle qui détermine les points sur les courbes.

Activité 4.7 : Dans cette activité, on demande aux élèves de réécrire toutes les règles trouvées dans les activités 4.2 à 4.6 sous la forme de définitions de lieux géométriques.

Les activités comprenant le pliage de papier (activités 4.8 à 4.11) sont des méthodes alternatives qui permettent de tracer une parabole, une ellipse et une hyperbole. Elles sont incluses dans cette unité, car on considère qu'il y a un certain avantage à considérer

différentes constructions et modèles pour les mêmes relations mathématiques. Le papier ciré est recommandé pour cette activité.

Activités 4.12 et 4.13 : Ces activités utilisent un papier graphique représentant deux séries de cercles concentriques pour construire une ellipse et une hyperbole. Ceci est une autre approche des relations coniques. La somme et la différence qui sont constantes sont calculées en comptant les anneaux concentriques sur le papier graphique. Pour ceux qui ne sont pas habitués à ce genre de papier graphique, un exemple est donné dans l'annexe.

Activités 4.14 à 4.17 : Dans ces activités, on demande aux élèves de tracer une courbe à l'aide de la définition du lieu géométrique, puis de trouver l'équation qui décrit ce lieu géométrique. On peut calculer les équations en sélectionnant des points sur le lieu géométrique et en utilisant des systèmes d'équations ou en procédant par la formulation d'hypothèses. Les élèves n'auront peut-être pas à faire toutes les activités de 4.14 à 4.17.

Activités 4.19 à 4.21 : Dans ces activités, on demande aux élèves de vérifier les définitions des lieux géométriques. Cela devrait être fait à l'aide de la formule de la distance.

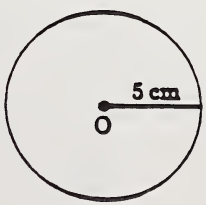
Activités 4.22 et 4.23 : Ces activités introduisent des problèmes qui comprennent l'analyse et la détermination des caractéristiques des coniques.

ACTIVITÉS DESTINÉES AUX ÉLÈVES

Activité 4.1 : Choisir deux points A et B sur une feuille de papier. Trouver tous les points qui sont équidistants de ces deux points.

Activité 4.2 : Tracer un système de points qui comprend le point (0, 4) et qui suit cette règle : « la pente entre deux points quelconques est 3 ».

Activité 4.3 : Selon l'ensemble de points représentés sur le diagramme, écrire une règle qui définira tous les points de la courbe.



Activité 4.4 : En utilisant un compas et une feuille lignée, construire une parabole en utilisant les procédés soulignés dans la section INVESTIGATION, à la page 100 du manuel Mathematics 12 (Addison-Wesley). Écrire une règle qui définira tous les points de la courbe.

Activité 4.5 : Construire une ellipse en utilisant les procédés soulignés dans la section INVESTIGATION, à la page 112 du manuel Mathematics 12 (Addison-Wesley). Écrire une règle qui définira tous les points de la courbe.

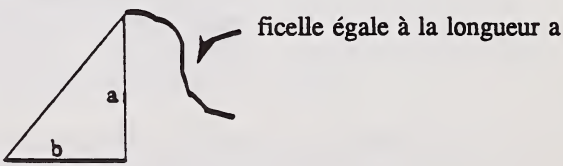
Activité 4.6 : Construire une hyperbole en utilisant les procédés soulignés dans la section INVESTIGATION, à la page 119 du manuel Mathematics 12 (Addison-Wesley). Écrire une règle qui définira tous les points de la courbe.

Activité 4.7 : Un lieu géométrique est une trajectoire ou un ensemble de points qui suit une certaine règle. La règle en elle-même est appelée définition du lieu géométrique. Une définition du lieu géométrique pour l'activité 4.1 serait : « La droite est le lieu géométrique des points équidistants de deux points fixes A et B ». Réécrire les règles des activités 4.2 à 4.6 en termes de définitions de lieux géométriques.

Activité 4.8 : En utilisant une équerre de grande dimension, une règle et un bout de ficelle, construire une figure en suivant les étapes suivantes :

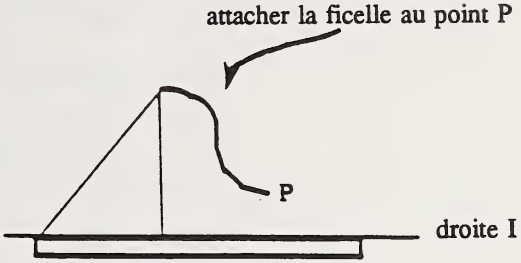
1. À l'aide d'un ruban, coller la ficelle au bout le plus long de l'équerre.

2. Couper le bout de ficelle d'une longueur égale à celle du côté a de l'équerre.



3. Tracer la droite I et choisir un point P au-dessus de cette droite.

4. Placer la règle, l'équerre et la ficelle comme dans le diagramme ci-dessous.



5. Avec un crayon qui retient la ficelle contre le côté a de l'équerre, glisser l'équerre le long de la règle et tracer ainsi une courbe.

6. Déplacer l'équerre de l'autre côté du point P et compléter la figure.

Quelle est la courbe obtenue ?
Écrire la définition du lieu géométrique de ce système de points.

Activité 4.9 : Découper un cercle dans un morceau de papier ciré. Inscrire le point P à l'intérieur du cercle. Choisir un point sur la bordure du cercle et pliez le papier afin que ce point touche le point P. Faire le pli. Répéter ces étapes en choisissant différents points sur la circonférence du cercle jusqu'à ce que la courbe qui apparaît puisse être décrite. Quelle conique a été créée ? Pourquoi cette méthode produit-elle cette courbe ?

Activité 4.10 : Découper un rectangle dans un morceau de papier ciré. Inscrire le point P dans le rectangle. Choisir un point sur le côté inférieur du rectangle et plier le papier afin que ce point touche le point P. Faire le pli. Répéter ces étapes en choisissant différents points sur le bord du rectangle jusqu'à ce que la courbe qui apparaît puisse être décrite. Quelle conique a été créée ? Pourquoi cette méthode produit-elle cette courbe ?

Activité 4.11 : Tracer un cercle sur un morceau de papier ciré de forme rectangulaire. Inscrire un point P à l'extérieur du cercle. Plier le papier de façon que le point P touche un point de la circonférence. Faire le pli. Répéter ces étapes en choisissant différents points sur la circonférence du cercle jusqu'à ce que la courbe qui apparaît puisse être décrite. Quelle conique a été créée ? Pourquoi cette méthode produit-elle cette courbe ?

Activité 4.12 : Utiliser un papier graphique à deux séries de cercles concentriques (Voir l'annexe C.)

1. Nommer les deux centres A et B.

2. Sélectionner un nombre (inférieur à 20).

3. Trouver un point P tel que la distance PA + PB soit égale au nombre sélectionné.

4. Trouver d'autres points qui satisfont à cette condition.

5. Poursuivre ce processus jusqu'à ce qu'il soit possible de tracer une courbe complète.

Quelle est la forme de cette courbe ?
Pourquoi cette méthode produit-elle ce genre de courbe ?

Activité 4.13 : Utiliser un papier graphique à deux séries de cercles concentriques. (Voir l'annexe C.)

1. Nommer les deux centres A et B.

2. Sélectionner un nombre.

3. Trouver un point P tel que la distance |PA - PB| est égale au nombre sélectionné.

4. Trouver d'autres points qui satisfont à cette condition.

5. Poursuivre ce processus jusqu'à ce qu'il soit possible de tracer une courbe complète.

Quelle est la forme de cette courbe ?
Pourquoi cette méthode produit-elle ce genre de courbe ?

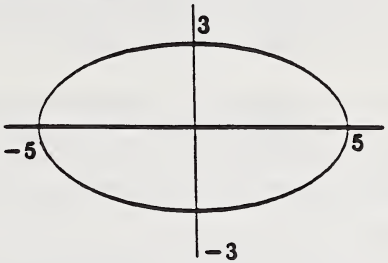
Activité 4.14 : Construire une parabole sur du papier graphique en utilisant le procédé de l'activité 4.4. Tracer un système d'axes sur ce papier graphique. Écrire l'équation de cette parabole. Écrire l'équation de la directrice. Nommer les coordonnées du foyer.

Activité 4.15 : Construire une ellipse sur du papier graphique en utilisant le procédé de l'activité 4.5. Tracer un système d'axes sur ce papier graphique. Écrire l'équation de cette ellipse. Nommer les coordonnées des foyers.

Activité 4.16 : Construire une hyperbole sur du papier graphique en utilisant le procédé de l'activité 4.6. Tracer un système d'axes sur

ce papier graphique. Écrire l'équation de cette hyperbole. Nommer les coordonnées des foyers.

Activité 4.17 : D'après le diagramme suivant, trouver une équation qui produit cette ellipse.



Défi à relever : Quelle est la somme constante ?
Donnez les coordonnées des foyers.

Activité 4.18 : Trouver la somme constante de l'équation $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Activité 4.19 : Soit l'équation $x^2 - 16y - 16 = 0$, dont la directrice est $y = -4$ et le foyer $(0, 4)$. En sélectionnant deux points sur le lieu géométrique, vérifier la définition du lieu géométrique de la courbe.

Activité 4.20 : Soit l'équation $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ et $(-5, 0)$ et $(5, 0)$ comme foyers. En sélectionnant deux points sur le lieu géométrique, vérifier la définition du lieu géométrique de la courbe.

Activité 4.21 : Soit l'équation $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$, ayant des foyers à $(-4, 0)$ et à $(4, 0)$. En sélectionnant deux points sur le lieu géométrique, vérifier la définition du lieu géométrique de la courbe.

Activité 4.22 : Deux poteaux sont plantés dans le sol à une distance de 20 m l'un de l'autre et une corde de 40 m de longueur est attachée aux poteaux. La corde passe par l'anneau du collier d'un chien de garde.

a. Quelle est l'équation qui décrit le périmètre de l'aire dans laquelle le chien peut se déplacer?

b. Un trottoir est parallèle à la ligne que forment les deux poteaux et est situé à 30 m de cette ligne. Quelle est la longueur maximum qu'il est possible de donner à la corde si le chien ne doit pas se rendre jusqu'au trottoir?

Activité 4.23 : Un avion peut voler au maximum 1 000 km par jour. Une distance de 300 km sépare Rivière-de-la-Paix d'Athabasca. Le pilote commence toujours son voyage dans une ville pour le terminer dans l'autre. Il peut prendre des directions différentes durant son vol. À l'intérieur de quelle figure le pilote serait-il obligé de voler ?

Activité 4.24 : Trouver l'équation de l'ellipse lorsque la somme constante est 12 et que les foyers sont (-3, 0) et (3, 0).

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T1 : pages 175 à 177, 189 à 192, 201 à 205 et 355 à 366
INF, M534 : pages 334 à 342
BMS, 5B : pages 120 à 128

CONCEPT 5

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que toute conique peut être décrite comme un lieu géométrique de points, de sorte que le rapport entre la distance d'un point de cette conique à un point fixe et la distance entre le même point et une droite fixe est une constante. Ce rapport est appelé excentricité.

REMARQUES

Les pages d'activités destinées aux élèves comportent des recherches et des problèmes qui sont appropriés à l'étude de ce concept. L'activité 5.1 est basée sur les définitions des lieux géométriques des concepts précédents. Les enseignants désireront peut-être lire l'introduction de cette activité dès maintenant. Les résultats que les élèves devraient trouver sont résumés dans le tableau ci-dessous. Le rapport dont il est question dans cette activité est appelé excentricité. Tandis que l'excentricité d'une ellipse tend vers zéro, l'ellipse, quant à elle, tend vers un cercle.

CONIQUE	EXCENTRICITÉ
PARABOLE	ÉGALE À UN
ELLIPSE	ENTRE 0 ET 1
HYPERBOLE	SUPÉRIEURE À 1

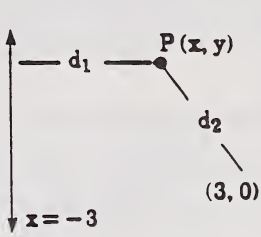
Des échantillons de papier graphique représentant des cercles et des droites sont fournis dans l'annexe de ce document. Un exemple d'utilisation de ce papier graphique est donné à la page suivante. Au début, les élèves auront peut-être besoin d'aide pour travailler avec ce genre de papier graphique.

Activité 5.2 : Cette activité est semblable aux recherches qui ont été faites dans les concepts 3 et 4. Une des valeurs peut varier alors que les autres sont changées. Dans cette activité, la directrice peut être déplacée tandis que le foyer et les excentricités changent. Les élèves devraient résumer leurs trouvailles par écrit. Il serait peut-être approprié d'assigner des excentricités différentes à chacun des groupes.

Activité 5.3 : Dans cette activité, on utilise une seule directrice et un foyer pour tracer une ellipse, une hyperbole et une parabole. L'excentricité de chaque conique peut être déterminée à l'aide de la formule de la distance et de points situés sur chacune des coniques.

Activité 5.4 : On demande à chaque élève d'utiliser la définition du lieu géométrique pour déterminer si un point fait partie du lieu géométrique ou non. De plus, on utilise la définition du lieu

géométrique pour trouver l'équation de la conique obtenue (une solution est démontrée plus bas). Les enseignants peuvent également demander aux élèves de concevoir la définition d'un lieu géométrique d'une conique, puis d'en trouver l'équation.



$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{x+3}$$

$$\frac{d_2}{d_1} = 2 \text{ (l'excentricité est de 2)}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 2x+6$$

$$x^2-6x+9+y^2 = 4x^2+24x+36$$

$$3x^2-y^2+30x+25 = 0$$

ACTIVITÉS DESTINÉES AUX ÉLÈVES

Activité 5.1 : La définition du lieu géométrique de la parabole comprend la distance mesurée d'un point fixe, appelé foyer, et la distance jusqu'à une droite fixe, appelée directrice. Ces distances sont égales pour tout point situé sur la parabole.

distance au foyer = distance à la directrice (PARABOLE)

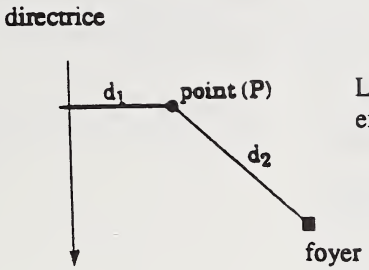
Une autre façon d'énoncer cette définition consiste à dire que le rapport entre les distances est égal à un.

$$\frac{\text{distance au foyer}}{\text{distance à la directrice}} = 1 \text{ (PARABOLE)}$$

Qu'arrive-t-il si le rapport n'est pas égal à 1 ? Sur le papier graphique représentant des cercles et des droites, choisir un foyer qui sera situé au centre des cercles concentriques. Choisir une droite quelconque en guise de directrice. Tracer le lieu géométrique des points pour lesquels le rapport possède les valeurs suivantes :

a. 2/3
b. 3/2
c. 3/4
d. 4/3
e. 1

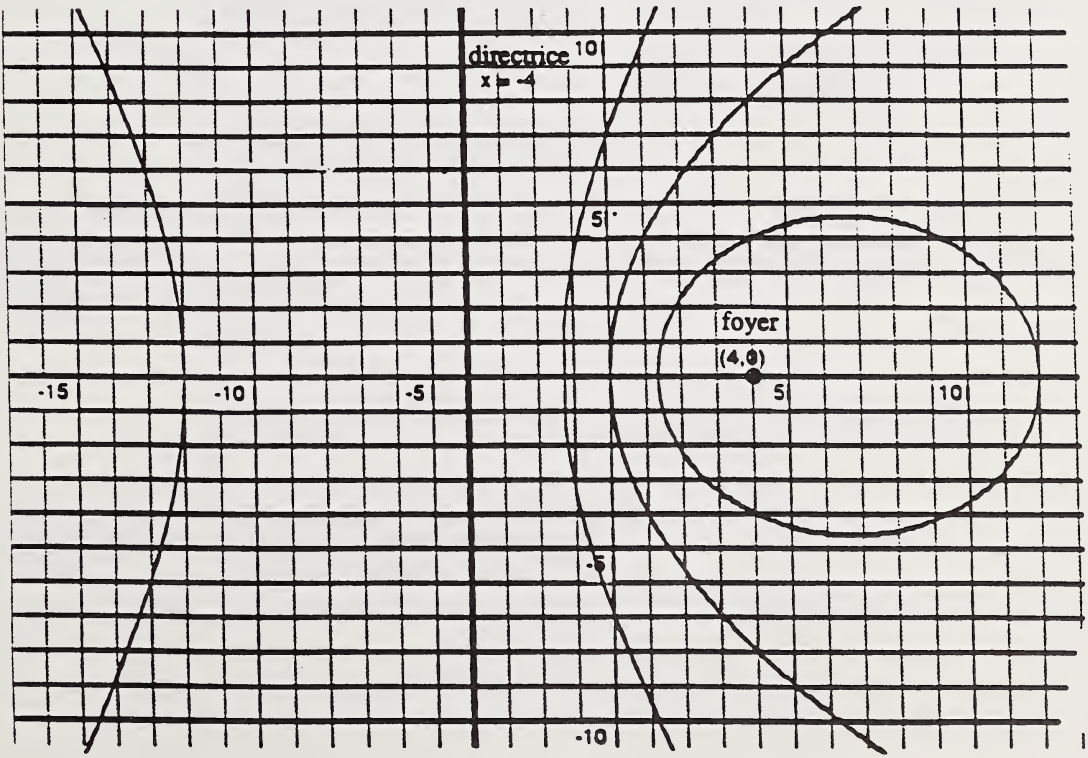
En se fiant aux résultats obtenus, quelles hypothèses est-il possible de formuler ? Vérifier ces hypothèses avec d'autres rapports. Résumer les résultats obtenus en un paragraphe.



Le rapport d_2/d_1 est appelé excentricité

Activité 5.2 : Le rapport dont il était question dans l'activité 5.1 est appelé excentricité. Utiliser le papier graphique représentant des cercles et des droites pour déterminer ce qui arrivera au lieu géométrique de certains points, si l'excentricité est fixe et la directrice change de position. Résumer tout fait trouvé dans un paragraphe.

Activité 5.3 : Trouver l'excentricité de chacune des coniques ci-dessous.



Activité 5.4 : Trouver trois points sur la conique dont la directrice est située à $x + 3 = 0$, le foyer à (3, 0) et qui possède une excentricité de 2. Vérifier si ces points sont situés sur la conique, à l'aide de la formule de la distance. Trouver l'équation de la conique et tracez-en le graphique.

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 10 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une fonction exponentielle est une fonction dans laquelle la variable figure sous forme d'exposant.	Les élèves devront être en mesure de tracer le graphique de fonctions exponentielles simples données sous la forme $y = a^x$, pour $a > 0$. Les élèves devront être en mesure d'utiliser les fonctions exponentielles afin d'estimer les valeurs de racines et de puissances.	Les élèves devront être en mesure de tracer et d'analyser des graphiques de fonctions exponentielles à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Les élèves devront être en mesure de déterminer le domaine et l'image des fonctions exponentielles. Les élèves devront être en mesure de résoudre et de vérifier des équations exponentielles.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que de nombreuses situations réelles comportent certaines propriétés exponentielles.	Les élèves devront être en mesure d'écrire des fonctions exponentielles qui représentent des situations comportant une croissance ou une décroissance exponentielle.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui comportent des croissances et des décroissances exponentielles.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent les caractéristiques et les applications des fonctions logarithmiques.	Les élèves devront être en mesure de tracer le graphique de fonctions logarithmiques comme étant la réciproque des fonctions exponentielles. Les élèves devront être en mesure d'utiliser les graphiques de fonctions logarithmiques pour trouver les valeurs d'une des variables, à partir des valeurs de l'autre variable. Les élèves devront être en mesure de convertir des fonctions de la forme exponentielle à la forme logarithmique et vice versa.	Les élèves devront être en mesure de tracer et d'analyser les graphiques de fonctions logarithmiques à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Les élèves devront être en mesure de déterminer le domaine et l'image des fonctions logarithmiques.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les opérations sur les logarithmes sont soumises à des propriétés et à des lois fondamentales.	Les élèves devront être en mesure d'appliquer les lois et les propriétés logarithmiques suivantes : $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$ $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$ $\log_a m^n = n\log_a m$ Les élèves devront être en mesure de résoudre et de vérifier des équations logarithmiques.	Les élèves devront être en mesure d'évaluer des expressions logarithmiques à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Les élèves devront être en mesure de résoudre et de vérifier des équations logarithmiques à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'un logarithme de base 10 est un logarithme vulgaire.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des équations logarithmiques et d'évaluer des expressions logarithmiques à l'aide de logarithmes vulgaires.	

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 10 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il existe de nombreux phénomènes dont les caractéristiques peuvent être décrites à l'aide des fonctions logarithmiques.	Les élèves devront être en mesure d'écrire des fonctions logarithmiques afin de décrire des situations qui possèdent des caractéristiques logarithmiques.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui comportent des propriétés logarithmiques par le développement et la résolution d'équations logarithmiques.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une fonction exponentielle est une fonction dans laquelle la variable figure sous forme d'exposant.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit:

1.1 tracer le graphique de fonctions exponentielles simples données sous la forme $y = a^x$, pour $a > 0$;

1.2 utiliser les fonctions exponentielles afin d'estimer les valeurs de racines et de puissances;

- 1.2.1 les élèves devront être en mesure de tracer et d'analyser des graphiques de fonctions exponentielles à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur;
- 1.2.2 les élèves devront être en mesure de déterminer le domaine et l'image des fonctions exponentielles;

1.3 les élèves devront être en mesure de résoudre et de vérifier des équations exponentielles.

REMARQUES

Une façon d'introduire ce concept peut consister, par exemple, à considérer le nombre d'ancêtres directs que chacun possède dans sa famille. Supposons que la première entrée est deux (les parents de l'élève) et que la seconde entrée est quatre (pour les grands-parents), etc. Cette relation est exponentielle. Elle permet d'étudier le domaine, l'image, l'abscisse et l'ordonnée à l'origine, de même que la solution d'équations exponentielles.

Les élèves doivent avoir acquis suffisamment d'expérience pour tracer les graphiques de diverses fonctions, mais ils auront peut-être besoin de revoir les graphiques des fonctions exponentielles.

Pour ce concept, on doit s'en tenir aux solutions d'équations exponentielles qui peuvent être résolues en changeant les deux membres de l'équation à la même base. La solution des autres équations devrait être examinée graphiquement, comme dans l'activité qui suit. Les solutions algébriques de ces équations seront étudiées dans un concept ultérieur.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, demandez aux élèves de tracer les graphiques de $y = 2x$, $y = x^2$ et $y = 2^x$. Demandez ensuite aux élèves de noter toute similitude ou différence en mettant l'accent sur certains concepts comme le domaine, l'image, de même que l'abscisse et l'ordonnée à l'origine. En se servant des unités étudiées auparavant, comme celles portant sur les fonctions quadratiques et les fonctions polynomiales, demandez aux élèves de prédire quelles formes prendront ces graphiques et quelle

différence il y aura entre ceux-ci : $y = 4x$, $y = x^4$ et $y = 4^x$. Ensuite, utilisez une calculatrice ou un ordinateur pour tracer les graphiques.

Activité : En utilisant la fonction « zoom » (ou une fonction équivalente) d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur, déterminer les valeurs de certaines expressions et résoudre certaines équations exponentielles à l'aide de graphiques d'équations exponentielles (interpolation), comme dans l'exemple qui suit.

Évaluer : $\sqrt{5}$

Solution : Réécrire $\sqrt{5}$ sous la forme de $5^{\frac{1}{2}}$, puis tracer le graphique de $y = 5^x$. Faire un « zoom » sur le point qui possède une coordonnée « x » de ½ ou 0,5 pour trouver la coordonnée de « y ».

Résoudre : $20 = 2^x$

Solution : Tracer une droite horizontale, $y = 20$, qui coupe le graphique de $y = 2^x$. Tracer ensuite une droite verticale à partir de ce point d'intersection jusqu'à l'axe des x afin de déterminer que la valeur de x est d'environ 4,3. Par conséquent, $20 \doteq 2^{4,3}$.

Si les moyens technologiques appropriés ne sont pas disponibles, l'interpolation qui est discutée dans Holtmath 12, à la page 128, constitue une alternative valable. Cette méthode fournit une alternative permettant d'effectuer un calcul approximatif et renforce l'interpolation étudiée précédemment en mathématiques et dans d'autres domaines comme la science et les sciences sociales.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les possibilités graphiques des calculatrices et des ordinateurs peuvent s'avérer des outils fort utiles pour aider l'élève dans ses recherches. En utilisant la machine pour effectuer la « lourde tâche » du traçage des graphiques, l'élève peut se concentrer sur l'analyse et la formulation d'hypothèses.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Demandez aux élèves de faire l'essai de $y = a^{-x}$. Cela leur servira ultérieurement lors de l'étude de la croissance et la décroissance exponentielle.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, 01, T2 : pages 413 à 439
BMS, 4D : pages 142 à 149 et 152 à 157
INF, M434 : pages 300 à 336

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que de nombreuses situations réelles comportent certaines propriétés exponentielles.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 écrire des fonctions exponentielles qui représentent des situations comportant une croissance ou une décroissance exponentielle;

2.1.1 résoudre des problèmes qui comportent des croissances et des décroissances exponentielles.

REMARQUES

Une excellente façon d'introduire la fonction exponentielle consiste à mettre les élèves devant des situations où ils devront trouver une relation fonctionnelle entre deux variables en recherchant un modèle. (Reportez-vous à la section PROCESSUS plus loin.) Les problèmes qui comportent une croissance ou une décroissance en pourcentage se prêtent bien à cette méthode. À titre d'exemple, on peut citer la dépréciation, la croissance démographique, les augmentations de salaires, la diminution de l'intensité de la lumière qui traverse différents matériaux et les intérêts composés. (Utiliser la notation fonctionnelle lorsque cela est possible.) Certains de ces problèmes seront également abordés lors de l'étude des suites géométriques. Il convient de traiter les problèmes de différents points de vue. Tentez d'éviter la situation qui amène les élèves à croire qu'il existe cinq sortes de problèmes du type exponentiel.

S'il n'y a aucune autre variable dont il faut tenir compte, la croissance démographique est une fonction exponentielle. Une approche consiste à supposer que la relation fonctionnelle est sous la forme $P(t) = a \times 10^{kt}$, « a » et « k » étant les constantes qui doivent être déterminées pour cette situation. (Il importe de signaler que tout problème comportant une croissance ou une décroissance exponentielle peut être résolu de cette façon. La base peut également être autre que 10.) Si la valeur de P(t) est connue pour deux valeurs de t, il est possible de calculer la valeur des deux constantes, mais étant donné que les élèves n'ont pas encore étudié les logarithmes, la solution sera du type « supposer et vérifier ». (Reportez-vous à la section PROCESSUS plus loin.)

Le traitement du problème des lapins en Australie constitue un très bon exemple de cette situation[1].

[1] Paul Forrester, Algebra and Trigonometry Functions and Applications, Addison-Wesley, 1984, page 165.

Les problèmes comprenant une croissance et une décroissance exponentielles doivent pouvoir être résolus algébriquement sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux logarithmes. D'autres peuvent être analysés à l'aide de graphiques, comme dans l'activité qui suit.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : La valeur d'une maison croît à raison de 7 % par année. Si la valeur initiale de la maison était de 50 000 $, établir une table des valeurs pour les 10 premières années. Rechercher un modèle dans cette table et tenter d'écrire une relation qui existe entre la valeur et le temps. Utiliser la notation fonctionnelle. Se servir de cette relation pour trouver la valeur de la maison après 20 ans. À l'aide d'une calculatrice graphique, trouver à quel moment la maison vaudra 120 000 $. (INDICE : tracer le graphique de $y = 120\ 000$ et de la fonction, puis rechercher le point d'intersection). Noter par écrit de quelle façon la valeur de la maison change en fonction du temps.

Activité 2a : Recueillir de l'information au sujet de la population d'un pays au cours des 100 dernières années.

b. Choisir une date arbitraire et une autre date. Supposons que la population croît de façon exponentielle et que la relation fonctionnelle prend la forme $P(t) = a \times 10^{kt}$, « a » et « k » étant des constantes qui devront être déterminées.

c. Utiliser cette formule pour prédire les statistiques démographiques les plus récentes que vous puissiez trouver. Commenter la précision des calculs.

d. Supposons que la population est mieux représentée lorsqu'on utilise la fonction de la forme $P(t) = ct^2 + d$, une fonction quadratique. Recommencer les étapes précédentes pour cette nouvelle fonction.

e. Prédire la population de ce pays en l'an 2000 en utilisant les deux fonctions.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que le choix d'une fonction est très arbitraire et que ce choix doit être évalué en fonction de sa capacité d'effectuer des prédictions.

Exemple : La population du monde en 1960 était de 3 049 millions d'habitants et, en 1965, elle était de 3 358 millions. Supposons que la population peut être représentée à l'aide d'une fonction sous la forme $P(t) = a \times 10^{kt}$.

Soit 1960 représentant t = 0. Ainsi, « a » = 3 049 et, par conséquent, 1965 équivaut à t = 5. En effectuant une substitution, $3\ 358 = 3\ 049 \times 10^{5k}$. En divisant chacun des membres de l'équation, nous obtenons $1{,}103 = 10^{5k}$. On peut résoudre cette équation par la méthode des essais et vérifications ou en traçant le graphique à l'aide d'une calculatrice graphique et en recherchant le point d'intersection de $y = 10^{5k}$ et $y = 1{,}103$. La valeur de k est approximativement de 0,008 5. En utilisant la fonction pour prédire la population en 1988, nous obtenons :
$P(28) = 3\ 049 \times 10^{0{,}008\ 5(28)} = 5\ 274$, car 1988 se trouve 28 années après 1960, qui représente notre t = 0 arbitraire. La vraie réponse est 5 143 millions.

Problème : La taille d'un échantillon bactériologique, dont la taille initiale était de 50, double toutes les deux heures. Trouver la taille de l'échantillon après huit heures. Utiliser au moins deux méthodes différentes pour résoudre le problème.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, 01, T2 : pages 441 à 443
INF, M434 : pages 337 à 339 et 344 à 345

CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent les caractéristiques et les applications des fonctions logarithmiques.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1 tracer le graphique de fonctions logarithmiques comme étant la réciproque des fonctions exponentielles;

3.2 utiliser les graphiques de fonctions logarithmiques pour trouver les valeurs d'une des variables, à partir des valeurs de l'autre variable;

3.2.1 tracer et analyser les graphiques de fonctions logarithmiques à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur;

3.2.2 déterminer le domaine et l'image des fonctions logarithmiques;

3.3 convertir des fonctions de la forme exponentielle à la forme logarithmique et vice versa.

REMARQUES

1. Toutes les propriétés des fonctions logarithmiques peuvent être dérivées, puisque les fonctions logarithmiques sont la réciproque des fonctions exponentielles correspondantes. L'étude des fonctions logarithmiques peut représenter pour l'élève une excellente occasion d'explorer sa compréhension des fonctions et de leurs réciproques. Les propriétés des fonctions et de leurs réciproques qui sont nécessaires sont notées plus bas. Certaines de ces propriétés ont été étudiées en Mathématiques 20, mais auraient besoin d'être revues.

   a. Une fonction et sa réciproque possèdent des tables de valeurs qui sont l'image « réfléchie » l'une de l'autre. Donc, leurs domaines et leurs images sont interchangés.

   b. Si $f(d) = p$, alors $f^{-1}(p) = d$.

   Les élèves peuvent tracer le graphique de toute fonction logarithmique et travailler avec ses propriétés comme le domaine, l'image et l'abscisse et l'ordonnée à l'origine sans comprendre ce que fait la fonction. On devrait mentionner aux élèves que la fonction logarithmique possède un domaine de $x > 0$.

2. Les élèves ont rencontré des fonctions réciproques lorsqu'ils ont résolu des équations de types suivants :

   a. $\sin(x) = 0{,}5$
   En appliquant la fonction réciproque à chacun des membres, le membre gauche est réduit à x.

$\sin^{-1}(\sin(x)) = \sin^{-1}(0,5)$

$x = 30°$

b. $f(x) = x^2 = 45$

La fonction réciproque de f(x) est la racine carrée de la fonction. En appliquant la fonction réciproque à chacun des membres, le membre gauche est réduit à x et la solution est les deux racines carrées de 45.

3. Une fois que les élèves auront compris les propriétés des fonctions réciproques, ils seront en mesure de dériver de nombreuses propriétés de la fonction logarithmique. Exemple : si $g(x) = 3^x$, alors $g^{-1}(x) = \log_3 x$.

4. Tout énoncé d'une fonction exponentielle peut être converti en un énoncé logarithmique équivalent. Le lien peut être établi à l'aide d'une table de valeurs, comme ci-dessous.

Les étapes logiques sont les suivantes :

a. $y = b^x$
b. si (m, n) est sur le graphique, alors $n = b^m$
c. cela signifie que (n, m) est sur le graphique de la réciproque
d. la réciproque de $y = \log_b x$
e. si (n, m) est sur le graphique, alors $m = \log_b n$.

Ce qui signifie que $n = b^m$ et $m = \log_b n$ sont des versions différentes du même concept. Ceci est une prise de conscience importante. Lorsqu'une équation logarithmique est donnée, encouragez les élèves à l'examiner également comme une équation exponentielle.

Les fonctions développées dans la section des fonctions exponentielles pourraient être converties en énoncés logarithmiques aussi valables. Le graphique qui en résulte devrait être comparé à celui de la fonction exponentielle correspondante. On devrait également comparer leurs domaines et leurs images.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Tracer le graphique de la fonction réciproque de $y = 2^x$.

Problème : Quels sont le domaine et l'image de la fonction $y = \log_4 x$?

Problème : Sans l'aide d'une calculatrice, estimer la valeur de $\log_2(70)$ au nombre entier le plus près.

Activité : Décrire comment il est possible d'utiliser le graphique de $y = 4^x$ pour tracer $\log_4(20)$ et $\log_4(1\ 000)$.

Activité : Tracer le graphique de $y = 0{,}5^x$ et sa fonction réciproque. Quelle est sa fonction réciproque ?

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Il sera possible de tracer le graphique de fonctions logarithmiques et exponentielles sur une calculatrice graphique ou sur un ordinateur. Il serait utile d'apprendre à établir les plages sur la calculatrice, puisqu'on devra trouver le domaine et l'image de ces fonctions. Cela donnera un meilleur champ visuel.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Une fonction et sa réciproque représentent la fonction identité. Ainsi, dans cette situation :

a. $g(g^{-1}(v)) = v$ ou $3^{\log(v)} = v$

b. $g^{-1}(g(m)) = m$ ou $\log_3(3^m) = m$

Cette règle doit être étendue à l'ensemble des autres bases.

Activité : Trouver la réciproque de la fonction $f(x) = 3x + 2$. Démontrer que ces deux fonctions sont réciproques en choisissant différentes valeurs pour x. Démontrer que $f(f^{-1}(a)) = a$ et que $f^{-1}(f(v)) = v$.

Problème : La fonction $y = \ln(x)$ est un logarithme qui utilise une base irrationnelle. En comparant le graphique de ln(x) avec ceux dont les logarithmes possèdent des bases d'entiers, déterminer entre quels entiers se situe la base irrationnelle.

Problème : Une fonction appelée tronquée(x) supprime toutes les décimales de toute fonction sur laquelle elle agit. Formuler des commentaires sur la réciproque de la fonction tronquée(x). Exemple : fonction tronquée(4,568 9) = 4.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, 01, T2 : pages 439 et 440, 467 à 487
BMS, 4D : pages 158 à 176
INF, M434 : pages 347 à 368

CONCEPT 4

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les opérations sur les logarithmes sont soumises à des propriétés et à des lois fondamentales.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

4.1 appliquer les lois et les propriétés logarithmiques suivantes :

$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

$\log_a m^n = n\log_a m$

4.1.1 évaluer des expressions logarithmiques à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur;

4.2 résoudre et vérifier des équations logarithmiques;

4.2.1 résoudre et vérifier des équations logarithmiques à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

REMARQUES

Un certain retour historique à propos du développement des logarithmes effectué par John Napier peut s'avérer une excellente façon d'introduire ce concept. Au début du XVII[e] siècle, les astronomes et autres scientifiques ont démontré un grand intérêt pour le « nouveau » concept. Ils ont reconnu son potentiel pour la simplification de leurs calculs. Cela représente également une occasion idéale de discuter de la nature évolutive des mathématiques. Il est rare qu'un sujet étudié au cours de mathématiques de niveau secondaire puisse être aussi facilement retracé jusqu'à son origine comme le sont les logarithmes. Les élèves peuvent explorer la nature « humaine » des mathématiques en se servant, à titre d'exemple, des logarithmes. On pourrait étendre la discussion en comparant l'importance accordée aux calculs dans le passé avec des applications courantes, comme les échelles logarithmiques et les solutions d'équations logarithmiques et exponentielles.

Un autre point historique qui risque d'intéresser les élèves est la relation qui existe entre les lois des exposants et celles des logarithmes. La plupart des élèves constateront rapidement les liens et les similitudes. Toutefois, lorsque les lois des logarithmes étaient en voie d'élaboration, les exposants n'étaient pas monnaie courante en Europe. En d'autres termes, deux concepts ont vu le jour indépendamment l'un de l'autre, mais sont tout de même étroitement liés.

Comme l'énoncé logarithmique est souvent déroutant pour les élèves, il serait bon de souligner le lien qui existe entre les

fonctions logarithmiques et exponentielles. Comme celles-ci sont plus familières et plus faciles à utiliser, la compréhension des lois et des propriétés des logarithmes devrait être faite en passant par la compréhension des fonctions exponentielles.

Grâce à l'importance accordée au lien qui existe entre les fonctions logarithmiques et exponentielles, les élèves devraient être en mesure de vérifier des données semblables à celles-ci:

$$\log_2(8 \times 32) = \log_2 8 + \log_2 32$$
$$\log_2 256 \mid 3 + 5$$
$$8 \mid 8$$

Les élèves désireront sans doute connaître l'utilité de la touche « log » sur la calculatrice. L'enseignant aura donc l'occasion de répondre à la question par une leçon d'histoire et de demander aux élèves de vérifier les lois des logarithmes à l'aide de leur calculatrice. Ce sera également l'occasion de comparer les valeurs obtenues en utilisant les fonctions exponentielles de la calculatrice et les fonctions logarithmiques.

Il est important de souligner qu'autrefois, les logarithmes constituaient un outil de calcul très utile, mais qu'avec l'avènement de la calculatrice, ce rôle est maintenant mineur. Toutefois, de façon plus théorique, on en a trouvé des applications algébriques. La possibilité de résoudre une équation à l'aide des lois logarithmiques et des techniques vues antérieurement devrait être soulignée.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : En utilisant ce qu'ils savent sur les exposants et le fait que log ab = log a + log b, les élèves peuvent explorer certains cas comme ceux-ci :

$\log 5^2 = \log(5 \times 5) = \log 5 + \log 5 = 2\log 5$
$\log 5^3 = \log(5^2 \times 5) = \log 5^2 + \log 5 + \log 5 = 3\log 5$
$\log 5^4 = \log(5^3 \times 5) = \log 5^3 + \log 5 = 3\log 5 + \log 5 = 4\log 5$

Il est possible de demander aux élèves d'examiner le modèle qui en découle et d'étendre à l'ensemble des cas $\log 5^n = n\log 5$ pour chaque entier « n ». Les élèves peuvent ensuite utiliser les touches y^x et log sur une calculatrice afin de confirmer cette généralisation avec différentes valeurs numériques, n = 0, 9 et 14 par exemple.

Comme précédemment, le processus algébrique en soi suggère souvent une généralisation. Certains élèves observeront peut-être, par exemple, que leurs manipulations algébriques ne dépendaient pas du chiffre 5 en particulier, ce qui conduit à une affirmation plus générale, $\log a^n = n \log a$, pour $a > 0$.

Activité 2 : Une utilisation différente de la fonction « log » de la calculatrice consiste à demander aux élèves de compléter un tableau comme celui qui suit, puis de tenter d'élaborer eux-mêmes certains concepts.

m	n	logm	logn	mn	log(mn)	10(m + n)	10log(mn)

Problème : À partir des approximations $\log_2 3 = 1{,}585$, $\log_2 5 = 2{,}322$ et $\log_2 10 = 3{,}332$, trouver approximativement le logarithme de base 2 des nombres suivants :

a. 1,5 b. 20

Solution : a. $1{,}5 = \frac{3 \times 5}{10}$, $\log_2\left(\frac{3 \times 5}{10}\right) = \log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 10$

$= 1{,}585 + 2{,}322 - 3{,}322$

$= 0{,}585$

b. $20 = 4 \times 5$, $\log_2(4 \times 5) = \log_2 4 + \log_2 5$

$= 2 + 2{,}322$

$= 4{,}322$

Problème : Résoudre $\log_2 x + \log_2(x + 2) - 3 = 0$

Solution : $\log_2(x^2 + 2x) = 3$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

Donc, $x = -4$ et $x = 2$.

Une de ces racines ne convient pas.

Laquelle est-ce ? Quelle en est la raison ?

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

La calculatrice a remplacé les logarithmes en tant qu'outil de base pour effectuer les calculs, mais il existe de nombreuses occasions où les logarithmes et la calculatrice peuvent être utilisés de pair pour résoudre de nouveaux problèmes. Certaines de ces nouvelles applications ont été illustrées dans la section ci-dessus.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

L'enseignant pourrait consulter un article écrit dans Mathematics Teacher, volume 78, numéro 2, février 1985, pages 106 à 109, afin d'y trouver une approche intéressante sur la façon de prouver les lois logarithmiques.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, 01, T2 : pages 494 à 500
BMS, 4D : pages 177 à 186 et 236 à 239
INF, M434 : pages 376 à 390

CONCEPT 5

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'un logarithme de base 10 est un logarithme vulgaire.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

5.1 résoudre des équations logarithmiques et évaluer des expressions logarithmiques en utilisant des logarithmes vulgaires.

REMARQUES

Les élèves doivent savoir que log x signifie en fait $\log_{10}x$ et que la touche log sur la calculatrice donne le logarithme vulgaire (de base 10).

Les élèves doivent être en mesure de résoudre des équations exponentielles de la forme $y = a^x$, pour « x » ou pour « a », en se servant du fait que si $y = a^x$, alors $\log y = \log a^x$. Autrement dit, $2 = 3^x$ et $x^{3/5} = 5$.

Les élèves doivent être en mesure de trouver le logarithme de tout nombre positif pour toute base positive en utilisant les logarithmes communs, par exemple, évaluer $\log_3 6$. On peut y parvenir en utilisant $\log_3 6 = x$, en changeant cette valeur sous sa forme exponentielle équivalente, puis en résolvant l'équation en utilisant les logarithmes vulgaires.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème : Il est possible d'exprimer le nombre 64 à l'aide d'une puissance de 2, 4 et 8, en se servant d'exposants entiers. Est-il possible d'écrire 64 sous forme de puissance de 10 ? de puissance de 5 ?

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les fonctions logarithmiques et exponentielles sont des fonctions réciproques. Sur la calculatrice, les élèves peuvent utiliser les touches y^x et log afin de confirmer cette généralisation à l'aide de valeurs numériques.

EXTENSION DE L'ENSEIGNEMENT

On devrait montrer aux élèves les tables des logarithmes et leur montrer de quelle façon les logarithmes vulgaires étaient trouvés avant l'avènement de la calculatrice.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, 01, T2 : pages 498, 499 et 502
BMS, 4D : pages 183 et 184
INF, M434 : page 381

CONCEPT 6

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il existe de nombreux phénomènes dont les caractéristiques peuvent être décrites à l'aide des fonctions logarithmiques.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

6.1 écrire des fonctions logarithmiques afin de décrire des situations qui possèdent des caractéristiques logarithmiques;

6.1.1 résoudre des problèmes qui comportent des propriétés logarithmiques par le développement et la résolution d'équations logarithmiques.

REMARQUES

Ce concept représente une excellente occasion d'intégrer des concepts de chimie et de physique. La magnitude des tremblements de terre, la force d'un son, l'intensité de la lumière et le pH sont toutes des données mesurées à l'aide de logarithmes. Les élèves doivent connaître ces exemples et être en mesure de comprendre la raison pour laquelle ils sont utilisés.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Demandez aux élèves de calculer, en secondes, leur âge et celui des autres membres de leur famille et d'écrire ces âges dans un tableau par ordre croissant. Demandez-leur d'établir une échelle logarithmique qui représente ces âges, puis de convertir ces âges en secondes à la nouvelle échelle. Une fois cette échelle élaborée, posez aux élèves des questions du type « est-ce qu'un nombre deux fois plus grand sur la nouvelle échelle vous rend deux fois plus âgé ? » ou « que liriez-vous sur la nouvelle échelle si vous étiez deux fois plus âgé ? », ou encore « serez-vous encore vivant lorsque vous lirez sur votre échelle logarithmique sera un élément de plus que maintenant ? »

Exemple de tableau :

Âge en années	Âge en secondes	Âge sur l'échelle de log en utilisant Âge = log(âge en secondes)
12	378432000	8,58
17	536112000	8,73
40	1261440000	9,10
42	1324512000	9,12

Pourquoi est-il plus pratique d'utiliser les logarithmes lorsqu'on manipule des nombres très grands ou très petits ?

Activité : Demandez aux élèves de chercher la raison pour laquelle M. Richter a élaboré une échelle pour mesurer la magnitude des séismes et signalez que cette échelle utilise les logarithmes.

Problème : La demi-vie du strontium 90 est de 25 ans. Combien de temps faut-il pour qu'un échantillon de 150 mg décroisse jusqu'à ce qu'il atteigne une masse de 60 mg ?

Solution : Servons-nous de $M(t) = m_0 \times (½)^{t/h}$ ou d'une formule semblable à celle-ci :

$$60 = 150 \times (½)^{t/25}$$
$$0,4 = (½)^{t/25}$$

En prenant le logarithme de chacune des parties de l'équation, on a $t = 33a$.

Problème : Le séisme survenu en Alaska en 1934, qui avait une magnitude de 8,5 sur l'échelle de Richter, avait une intensité 40 fois plus forte que celui survenu à San Francisco en 1989. Quelle était la magnitude du séisme de San Francisco sur l'échelle de Richter ?

Solution : $10^{8,5 - R} = 40$. En utilisant le logarithme vulgaire de chacun des deux membres

$$8,5 - R = 1,6$$
$$6,9 = R$$

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

On devrait utiliser la fonction log et sa fonction réciproque sur la calculatrice.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, 01, T2 : pages 441 à 443 et 503 à 507
BMS, 4D : pages 231 et 231

PERMUTATIONS ET COMBINAISONS
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 10 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent le principe fondamental de calcul.	Les élèves devront être en mesure de calculer le nombre total de fois qu'il est possible d'exécuter différentes tâches si chacune de ces tâches peut être effectuée de nombreuses façons.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui comportent l'utilisation du principe fondamental de calcul.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une permutation est un arrangement dans lequel l'ordre est important.	Les élèves devront être en mesure de calculer le nombre de permutations qui existent pour n choses choisies r à la fois, en appliquant la formule : ${}_nP_r = \frac{n!}{(n - k)!}$.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui comportent des permutations linéaires, des permutations avec répétitions, des permutations circulaires et des permutations avec réflexions. Les élèves devront être en mesure de résoudre des questions de probabilités qui nécessitent l'utilisation de permutations.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une combinaison est un arrangement dans lequel l'ordre n'est pas important.	Les élèves devront être en mesure de calculer le nombre de combinaisons qui existent pour n choses choisies r à la fois en appliquant la formule : ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n - r)!}$	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes de probabilités qui nécessitent l'utilisation de combinaisons.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les coefficients numériques des termes d'un développement binomial peuvent être déterminés à l'aide du théorème des binômes.	Les élèves devront être en mesure de développer des binômes de la forme $(x + a)^n$, pour $n \in N_0$, à l'aide du théorème des binômes. Les élèves devront être en mesure de faire le lien entre les coefficients numériques d'un développement binomial et les termes du triangle de Pascal et vice versa.	

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent le principe fondamental de calcul.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 calculer le nombre total de fois qu'il est possible d'exécuter différentes tâches si chacune de ces tâches peut être effectuée de plusieurs façons;

1.1.1 résoudre des problèmes qui comportent l'utilisation du principe fondamental de calcul.

REMARQUES

Les élèves qui ont suivi les cours de Mathématiques 20 et Mathématiques 33 ont étudié les probabilités et ainsi ont appris à trouver le nombre total de fois que certains événements peuvent se produire, en jetant deux dés ou en jouant à pile ou face avec trois pièces de monnaie par exemple, à l'aide de diagrammes arborescents. Les élèves de Mathématiques 33 ont étudié les probabilités en Mathématiques 23.

Ce concept devrait être enseigné avec une approche de résolution de problèmes qui amène les élèves à examiner des solutions utilisant le principe fondamental de calcul. Des situations qui nécessitent un arrangement de lettres ou de chiffres, comme les chiffres d'une plaque d'immatriculation, les numéros de téléphone, les numéros d'assurance sociale ou les combinaisons de leur cadenas peuvent être utilisées.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Demandez aux élèves de choisir quatre chiffres quelconques et de compter combien de nombres différents ils peuvent former en utilisant ces quatre chiffres : a) sans répétition et b) avec répétition. Comparer les résultats de chacun avec ceux des autres. Demandez-leur de rechercher une façon de compter les divers arrangements possibles sans avoir à en dresser la liste.

Problème 1 : De nombreuses plaques d'immatriculation au Canada et aux États-Unis sont formées par trois lettres suivies de trois chiffres. Combien de plaques peuvent être ainsi formées ?

Activité 2 : Les plaques personnalisées sont maintenant disponibles. Demandez aux élèves d'examiner les restrictions apportées à ces plaques et de déterminer le nombre total de plaques personnalisées qu'il est possible de former. Le Mathematics Teacher, volume 77, numéro 3, mars 1984, page 183, contient un article intitulé « Counting Using Licence Plates and Phone Numbers: A Familiar Experience ».

Problème 2 : Combien de stations radiophoniques identifiées par des lettres peut-il y avoir au Canada si elles doivent comporter trois ou quatre lettres et que la première doit être un C ?

Solution : En utilisant quatre lettres $1 \times 26 \times 26 \times 26 = 17\ 576$
En utilisant trois lettres $1 \times 26 \times 26 = 676$
Total $18\ 252$

Une autre solution possible au cas des trois lettres consiste à assigner un espace vide en tant que quatrième lettre possible.

$1 \times 26 \times 26 \times 27 = 18\ 252$

Consultez les questions dans MPP30, page 405 et dans AW30, numéro 17 et numéro 19, page 502.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Pour obtenir d'autres méthodes de calcul, reportez-vous à l'ouvrage Mathematics of Choice, How to Count Without Counting d'Ivan Niven (The Mathematical Association of America). Ce livre constitue une excellente source de questions sur les permutations et les combinaisons.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5 : pages 305 à 309

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une permutation est un arrangement dans lequel l'ordre est important.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 calculer le nombre de permutations qui existent pour n choses choisies r à la fois, en appliquant la formule : ${}_nP_r = \frac{n!}{(n - k)!}$;

2.1.1 résoudre des problèmes qui comportent des permutations linéaires, des permutations avec répétitions, des permutations circulaires et des permutations avec réflexions;

2.1.2 résoudre des questions de probabilités qui nécessitent l'utilisation de permutations.

REMARQUES

On devrait aborder le sujet de la notation factorielle et celle-ci devrait être évaluée à l'aide d'une calculatrice.

Il est important de souligner qu'un changement de l'ordre d'un arrangement d'objets représente une permutation différente.

Le développement de la formule pour ${}_nP_r$ devrait être discuté en classe. Premièrement, les élèves doivent découvrir que le nombre de façons dont n des n objets peuvent être arrangés est en fait n! et ils doivent reconnaître que ${}_nP_n$ est le symbole utilisé pour représenter le nombre d'arrangements de n objets choisis n à la fois. Pour déterminer le nombre de permutations de n objets choisis r à la fois, r étant inférieur à n, utilisez le principe fondamental de calcul pour établir que ${}_nP_r = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$.

Et puisque $n! = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)(n - r)!$

$n! = {}_nP_r(n - r)!$

alors, $n!/(n - r)! = {}_nP_r$

Afin d'examiner la raison pour laquelle 0! est défini comme étant 1, utilisons r = n dans la formule ci-dessus.

Ainsi, $n!/(n - n)! = {}_nP_n$

Puis, $n!/0! = {}_nP_n$

Étant donné que ${}_nP_n = n!$, 0! doit alors être égal à 1.

La formule ${}_nP_r$ peut être utilisée seulement s'il n'y a pas de restrictions ni de répétitions dans le problème. Dans ce cas, on doit se servir du principe fondamental de calcul.

Il est conseillé d'aborder les permutations qui présentent des situations spéciales comme les objets adjacents, les permutations

avec répétitions, les arrangements circulaires, les permutations en anneaux et les permutations avec réflexions en demandant aux élèves de compter le nombre de permutations, puis de mettre au point une formule pouvant être utilisée pour différentes situations comportant ces arrangements. Utilisez quatre objets afin d'obtenir un calcul raisonnable.

Les problèmes qui comportent des objets adjacents nécessitent qu'un certain nombre d'objets soient disposés l'un près de l'autre pour tous les arrangements. Considérez les objets adjacents comme un seul objet et déterminez le nombre de permutations. Ce nombre est multiplié par le nombre de façons dont les objets adjacents eux-mêmes peuvent être disposés, car dans chaque permutation originale, les objets sont disposés dans le même ordre. Le nombre de façons dont n objets peuvent être disposés si une certaine partie k des objets doit être adjacente est $(n - k + 1)!k!$.

Les permutations avec répétitions ont le même élément qui se répète plus d'une fois dans l'arrangement. Considérez tous les objets comme des entités distinctes et trouvez le nombre d'arrangements possibles. Divisez ensuite ce nombre par le nombre de façons dont les objets qui se répètent peuvent être disposés. Le nombre d'arrangements de n objets si p objets représentent le même objet, si q objets représentent le même objet et ainsi de suite, est $n!/p!q!$ ...

Les permutations circulaires nécessitent que les objets soient rangés dans un cercle plutôt que sur une droite. Dans un arrangement circulaire, une rotation des arrangements n'est pas considérée comme une permutation différente. Afin de déterminer le nombre de permutations circulaires, placez un des objets sur le cercle, puis disposez les autres en fonction de celui-ci. Le nombre de façons dont n objets peuvent être disposés sur un cercle est $(n - 1)!$, puisque seule la position des articles relatifs l'un à l'autre est importante. Dans certaines situations, les objets peuvent également être réfléchis sans changer la permutation. Par exemple, si un porte-clés est tourné à l'envers (ceci est une réflexion), cet arrangement peut sembler différent, mais la permutation n'est pas considérée comme différente. Une permutation qui est considérée la même, si elle subit une rotation et une réflexion, est appelée une permutation en anneaux. Le nombre de permutations en anneaux pour n objets est $(n - 1)!/2$.

On considère les probabilités comme une application de ce concept et non le point de mire de celui-ci. Les élèves de Mathématiques 20 et Mathématiques 33 ont étudié les probabilités. Une révision des termes, comme total d'événements possibles, résultats, résultats favorables, événements et une révision de la formule servant à

calculer la probabilité d'un événement peut s'avérer nécessaire. On doit prendre soin de bien sélectionner les questions sur les probabilités tirées des ressources. À ce stade-ci, on devrait sélectionner, des questions comportant des permutations plutôt que des combinaisons.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1 : Trouver 100! Combien y a-t-il de zéros à la fin ? Réponse : 24.

Problème 2 : Chez un marchand de voitures usagées, huit automobiles à vendre sont rangées l'une à côté de l'autre sur la première rangée faisant face à la rue.

a. Combien d'arrangements est-il possible de faire si les trois voitures noires doivent être placées ensemble ?

b. Combien d'arrangements est-il possible de faire si les trois voitures noires ne doivent pas être adjacentes ?

Solution :

a. Considérons les trois voitures noires comme une entité. Il y a donc cinq voitures et cette entité à disposer, ce qui fait six objets. On peut le faire de 6! ou 720 façons différentes. Toutefois, pour chacun de ces arrangements, il y a 3! façons de disposer les voitures noires. Donc, il existe $6! \times 3! = 720 \times 6 = 4\ 320$ façons de disposer les voitures lorsque les voitures noires sont adjacentes.

b. Puisqu'il existe 8! façons de disposer les voitures sans restriction et que 4 320 de ces façons comportent des arrangements où les trois voitures sont adjacentes, l'arrangement final ne contiendra pas de voitures noires disposées l'une à côté de l'autre. Il existe donc $8! - 4\ 320 = 36\ 000$ façons de disposer les voitures sans que les trois voitures noires ne soient adjacentes.

Problème 3 : Une nouvelle société de micro-informatique donnera un prix d'un million de dollars à quiconque trouvera l'ordre dans lequel elle a disposé les lettres du mot SUPERCOMPUTER. Chaque réponse doit être envoyée dans une enveloppe différente. Combien cela vous coûtera-t-il pour poster toutes les réponses possibles ? Après avoir calculé ce qu'il vous en coûterait, vous décidez d'envoyer 13 réponses différentes, puisque 13 est votre nombre chanceux. Quelle est la probabilité que vous gagniez le million de dollars ?

Solutions : Placez temporairement des indices sous les lettres qui sont les mêmes. Afin de faire la distinction entre le premier et le second U, utilisez U_1 et U_2 et faites de même pour les deux « P », les deux « E » et les deux « R ». Si les lettres du mot SUPERCOMPUTER étaient toutes différentes, il y aurait 13! façons

de les disposer. La moitié de ces arrangements contiendrait les « U » dans l'ordre U_1, U_2 et l'autre moitié les contiendrait dans l'ordre U_2 et U_1. Sans les indices, il est impossible de distinguer ces deux groupes de permutations. De là, on obtient 13!/2! permutations qui se distinguent seulement parce que les « U » sont semblables.

De la même façon, pour les arrangements qu'il reste, nombre d'entre eux ne diffèrent que par le « P » ou par l'arrangement des « E » et des « R ». Le nombre de permutations que l'on peut distinguer est donc 13!/2!2!2!2!. Le coût d'envoi sera de 13!/2!2!2!2! × le coût d'un timbre-poste. La probabilité de gagner est de 13/(13!/2!2!2!2!).

Problème 4 : Un collier est fabriqué en enfilant des billes de bois sur une lanière de cuir que l'on noue à l'une des extrémités.

a. Si nous possédons 12 billes de différentes tailles que nous enfilons toutes sur la lanière et que l'on noue l'autre extrémité, combien de colliers différents pouvons-nous faire ?
b. Si les 12 billes étaient disposées de façon circulaire sur la lanière, c'est-à-dire que l'on ne pourrait y apercevoir le noeud, combien de colliers différents pourrions-nous faire ?

Solution :

a. Il y a 12! façons de placer les billes sur la lanière, mais comme la disposition tout à fait opposée ne donne pas de colliers différents, il existe donc 12!/2 possibilités de colliers différents.
b. Parce que seul l'arrangement des billes par rapport aux autres peut être distingué, plaçons une bille sur la lanière et déterminons le nombre de façons dont les autres billes peuvent être disposées; nous obtenons 11!. Puis, à cause de la propriété de la réflexion du collier, le nombre de permutations sera donc la moitié de 11!, soit 11!/2.

L'article « Exotic Horse-Race Wagering and Combinatorics », paru dans Mathematics Teacher, volume 77, numéro 1, janvier 1984, page 35, présente certains paris qui peuvent servir à introduire les permutations.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

On devrait montrer aux élèves la façon de se servir de la touche factorielle et de la touche ${}_nP_r$. On ne retrouve pas ces touches sur toutes les calculatrices. Demandez aux élèves de rechercher l'utilité de ces touches à l'aide d'un exercice comme celui que l'on retrouve dans AW30, au bas de la page 508 (INVESTIGATE). On doit faire attention lorsque l'on utilise la touche !, car même les nombres les plus petits sont donnés en notation scientifique.

On peut programmer les ordinateurs afin de calculer les permutations. Dans MPP12, à la page 430, on retrouve un programme de ce type, ainsi que des exercices.

Dans Mathematics Teacher, volume 77, numéro 1, janvier 1984, on retrouve un article sur la façon de calculer les nombres factoriels au-delà de 70!.

On peut programmer les ordinateurs de façon qu'ils impriment les permutations possibles d'un certain nombre d'objets. Consultez Mathematics Teacher, volume 80, numéro 5, mai 1987, page 403 pour y retrouver un programme possible.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Recherchez le nombre de permutations circulaires ou par anneaux si certains des éléments sont semblables. On utilise, par exemple, deux billes rouges et trois billes blanches pour faire un collier selon un arrangement circulaire. Combien de colliers différents est-il possible de faire ? Est-ce que les élèves pourraient développer une formule pour cette situation ?

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5 : pages 310 à 320

CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une combinaison est un arrangement dans lequel l'ordre n'est pas important.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1 calculer le nombre de combinaisons qui existent pour n choses choisies r à la fois en appliquant la formule : ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n - r)!}$;

3.1.1 résoudre des problèmes de probabilités qui nécessitent l'utilisation de combinaisons.

REMARQUES

Accordez de l'importance au fait qu'une combinaison est une sélection dans laquelle l'ordre n'est pas important. Avant d'aborder une question, encouragez les élèves à se demander si l'ordre est important ou non.

La notation combinaisons varie d'un ouvrage à l'autre. Signalons que ${}_nC_r$ et $\binom{n}{r}$ sont des notations équivalentes.

La formule ${}_nC_r$, tout comme la formule, ${}_nP_r$, ne peut être utilisée que si les objets sont distincts et si la répétition n'est pas permise.

On devrait discuter de la relation qui existe entre ${}_nP_r$ et ${}_nC_r$. Avec n objets distincts, ${}_nC_r$ compte le nombre de façons qu'il est possible de choisir r objets sans tenir compte de l'ordre. Peu importe les choix, ils ne représentent qu'une collection de r objets. Une collection de ce type peut être ordonnée de r! façons. Il existe donc r! fois de plus de permutations qu'il y a de combinaisons. Par conséquent, ${}_nP_r = r! \times {}_nC_r$ ou ${}_nC_r = {}_nP_r/r! = n!/r!(n - r)!$.

Les probabilités ne sont pas le point de mire de ce concept, mais elles servent plutôt aux applications des notions. Les élèves de Mathématiques 20 et Mathématiques 33 ont déjà travaillé avec les lois de la multiplication et de l'addition des probabilités.

Les problèmes qui suivent représentent en quelque sorte un défi à relever.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1 : Une élève vit à cinq pâtés de maisons à l'ouest de son école et à sept pâtés de maisons au sud. Ainsi, lorsqu'elle se rend à l'école, elle traverse 12 pâtés de maisons. Toutes les rues sont disposées selon un modèle rectangulaire et elles sont toutes praticables. De combien de façons différentes cette élève peut-elle se rendre à l'école, en ne traversant que 12 pâtés de maisons ?

Solution : Soit O un pâté de maison à l'ouest et S un pâté de maison au sud. Donc, un des trajets pourrait être OOSOSSSOOSSS, ce qui signifie qu'elle passe par deux pâtés de maisons à l'ouest, ensuite un au sud, puis un à l'ouest et trois au sud, etc. Donc, chaque trajet doit être formé par une suite de cinq « O » et de sept « S ». Afin de déterminer le nombre de trajets total, déterminez le nombre de façons dont vous remplirez cinq des 12 espaces par des « O », puis vous placerez les « S » dans les espaces qui seront demeurés vides. Cela donne ${}_{12}C_5 = 792$. Notez que cela représente également différentes façons où l'on peut choisir sept espaces sur 12 pour y insérer des « S ».

Problème 2 : Au hockey, la finale de la coupe Stanley est une série de parties qui prend fin lorsqu'une équipe (l'équipe gagnante) remporte quatre victoires. Si deux équipes ont les mêmes chances de gagner chacune des parties, quelle est la probabilité que les séries durent quatre parties ? cinq ? six ? sept ? (En supposant que les résultats des parties successives sont indépendants).

Solution : Nommons les deux équipes A et B. La probabilité que A gagne une partie est de ½, ce qui donne P(A) = ½; il en va de même pour B où P(B) = ½. Pour les séries qui seront gagnées en quatre parties, les deux séquences de victoires sont AAAA et BBBB, donc la probabilité que les séries soient remportées en quatre parties est $(½)^4 + (½)^4 = 0{,}115$. Les séquences possibles pour les séries se terminant en cinq parties sont BAAAA, ABAAA, AABAA et AAABA avec B et A qui s'interchangent. La probabilité que les séries soient remportées en cinq parties est $4P(A)^4P(B) + 4P(A)P(B)^4 = 0{,}25$. Le nombre de façons avec lesquelles la série durera six parties et sera gagnée par A est le nombre de façons dont nous pouvons choisir trois des cinq premières parties où A sera gagnante (puisque pour gagner A doit remporter la dernière partie et trois parties sur les cinq premières parties jouées). De la même façon, le nombre de façons dont l'équipe B gagnera la série en six parties est ${}_5C_3 = 10$. Donc, la probabilité que la série durent six parties est de $10P(A)^4P(B)^2 + 10P(A)^2P(B)^4 = 0{,}312\ 5$. En poursuivant ce raisonnement, la probabilité que la série dure sept parties est de $20P(A)^4P(B)^3 + 20P(A)^3P(B)^4 = 0{,}312\ 5$.

De quelle façon ces probabilités changeraient-elles, si la probabilité que l'équipe A gagne une certaine partie est de 0,6 ? Les réponses à deux décimales près sont 0,16, 0,27, 0,30 et 0,28.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Utilisez la touche ${}_nC_r$ sur la calculatrice.

On peut programmer les ordinateurs, de sorte qu'ils calculent le nombre de combinaisons possibles. Consultez MPP12, page 430, pour y retrouver un programme.

On peut programmer les ordinateurs afin qu'ils impriment les combinaisons possibles. Consultez Mathematics Teacher, volume 80, numéro 5, mai 1987, page 403.

EXTENSION DE L'ENSEIGNEMENT

1. Le principe fondamental de calcul nous permet de déterminer le nombre de résultats possibles lorsque la répétition est permise et lorsque l'ordre est important. Notre étude des permutations nous permet de déterminer le nombre de résultats possibles lorsque la répétition n'est pas permise et où l'ordre est important. Notre étude des combinaisons nous permet de déterminer le nombre de résultats possibles lorsque la répétition n'est pas permise et où l'ordre n'est pas important. Existe-t-il une façon de déterminer le nombre de résultats lorsque la répétition est permise et que l'ordre n'est pas important ? En lançant des dés, par exemple, nous déterminons habituellement les résultats possibles en choisissant des couleurs différentes dans le but de les distinguer. Donc, en lançant quatre dés, il y a 6^4 résultats possibles. Le résultat (1, 2, 3, 3) n'est pas le même que (1, 3, 2, 3) ou (3, 3, 2, 1). Toutefois, si les dés étaient tous de la même couleur, ces trois résultats paraîtraient semblables. Si vous lancez quatre dés de couleur identique, quel est le nombre de résultats que vous parviendriez à distinguer ? (12,6) Dans Mathematics Teacher, volume 81, numéro 2, février 1988, page 146, la formule ${}_nW_k = {}_{n-1+k}C_k = (n - 1 + k)!/(n - 1)!k!$, en l'honneur de Bishop Wibold, est développée pour représenter le nombre de résultats visiblement distincts que l'on peut retrouver lorsqu'un ensemble de n objets est choisi k fois avec un remplacement, mais sans tenir compte de l'ordre.

2. L'article « Counting Pizza Pieces and Other Combinatory Problems » paru dans Mathematics Teacher, volume 81, numéro 1, janvier 1988, page 22, donne une formule qui représente le nombre maximal de pointes que l'on peut retrouver dans une pizza lorsqu'on la coupe n fois. Cet article donne également une solution et une formule pour trouver le nombre maximal de régions que l'on retrouve à l'intérieur d'un cercle qui est divisé, en plaçant n points sur ce cercle et en reliant chaque paire de points. Ces formules sont développées en comptant et en analysant les résultats.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5 : pages 320 à 334

CONCEPT 4

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les coefficients numériques des termes d'un développement binomial peuvent être déterminés à l'aide du théorème des binômes.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

4.1 développer des binômes de la forme $(x + a)^n$, pour $n \in N_0$, à l'aide du théorème des binômes;

4.2 faire le lien entre les coefficients numériques d'un développement binomial et les termes du triangle de Pascal, et vice versa.

REMARQUES

Pour introduire le triangle de Pascal, utilisez l'évaluation de $\binom{n}{r}$ et écrivez les données selon une disposition triangulaire. Une fois les trois ou quatre premières rangées complétées, demandez aux élèves de développer une méthode qui leur permettra de compléter les trois ou quatre rangées suivantes. On peut se servir du triangle de Pascal pour déterminer les coefficients des termes d'un développement binomial. On devrait donc l'étudier avant de voir le théorème des binômes.

Les élèves de Mathématiques 30 devraient savoir comment élever un binôme au carré. Il sera peut-être nécessaire d'expliquer comment on développe le cube d'un binôme ou comment on développe des binômes de plus hautes puissances. Afin que les élèves découvrent l'utilité du triangle de Pascal, demandez-leur de développer des binômes de la forme $(a + b)^n$ où $n = 0, 1, 2, 3$, etc. et de noter la façon dont le développement procède à une décroissance des puissances de a et à une augmentation des puissances de b; leurs exposants s'additionnent toujours à ceux du binôme. Leurs coefficients numériques suivent le même modèle que ceux que l'on retrouve dans le triangle de Pascal. Les coefficients numériques de chacun des termes devraient être observés sous l'angle du nombre de façons dont il est possible de choisir une lettre de chacun des n facteur $(a + b)$. Tous les ouvrages traitent de ce sujet.

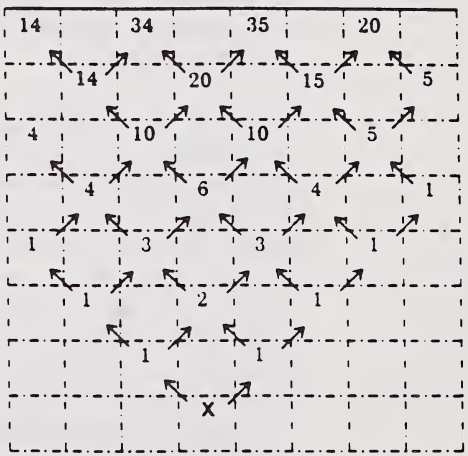
En développant des binômes de la forme $(ax + by)^n$, a et b étant des constantes, les coefficients de chacun des termes du développement sont également déterminés par les valeurs de a et de b. De plus, puisque la séquence des termes dans chacune des expressions suit un modèle défini, une expression du terme général t_n(ou t_{n+1}) pourrait être développée.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Après avoir étudié le triangle de Pascal, demandez aux élèves de trouver des modèles dans ce triangle de Pascal. En additionnant les nombres de chacune des rangées, par exemple, on obtient des puissances de 2. En additionnant le carré des nombres de chacune des rangées, on obtient un modèle que l'on peut retrouver dans le triangle de Pascal. Pour d'autres modèles comprenant les nombres naturels, les nombres triangulaires et les nombres pyramidaux, reportez-vous à « The Twelve Days of Christmas and Pascal's Triangle », dans Mathematics Teacher, volume 75, numéro 9, décembre 1982, page 755.

Problème 1 : Sur une planche de jeu de huit carreaux par huit, une dame est placée sur le quatrième carreau de la rangée du bas. Il est possible de déplacer la dame d'un carreau à la fois et en diagonale vers la droite ou vers la gauche, pour atteindre la rangée du dessus. Après avoir effectué sept déplacements, la dame aura atteint la rangée du haut. Combien de trajets différents conduisent à la rangée du haut ?

Réponse :



Il existe 14 + 34 + 35 + 20 = 103 façons de se rendre à la rangée du haut.

Le premier déplacement pourra atteindre une des positions indiquée sur la deuxième rangée. Il n'y a qu'une façon d'atteindre ces positions. Le prochain déplacement pourra atteindre un des trois carrés de la troisième rangée du bas. Il n'y a qu'une seule façon d'atteindre les carrés situés vers l'extérieur, mais deux façons de rejoindre ceux situés au milieu. Il n'y a qu'à poursuivre le raisonnement pour résoudre le problème.

Répétez la même question, mais cette fois-ci avec la dame placée au coin inférieur droit. La réponse est 35.

Activité 2 : Demandez aux élèves de simplifier les expressions $(a + b)^0$, $(a + b)^1$, $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ et $(a + b)^4$ à l'aide des techniques associées aux polynômes. En examinant ces développements, demandez-leur de trouver des modèles pour le nombre de termes, le degré de chacun des termes et le coefficient numérique de chacun des termes. Demandez-leur de trouver le développement de $(a + b)^5$ et de $(a + b)^6$ en utilisant ces modèles.

Problème 2 : Le polynôme $(p + q)^8$ est développé en puissances de p décroissantes. Les deuxième et troisième termes ont des valeurs identiques. Si p et q sont des nombres positifs dont la somme est 2, trouver la valeur de p.

Solution : Établir un système d'équations à résoudre. Une des équation est $p + q = 2$. L'autre équation est $8p^7q = 28p^6q^2$. La valeur de p est 8/5.

Problème 3 : Dans le développement de $(x^2 - 1/x)^9$ trouver :
a. le terme général t_{r+1};
b. le terme comprenant x^6;
c. le terme constant.

Solution :

a. $t_{r+1} = \binom{9}{r}(x^2)^{9-r}(-1/x)^r$

$= \binom{9}{r}(-1)^r x^{18-3r}$

b. Ainsi, on forme le terme comprenant x^6, $18 - 3r = 6$, donc $r = 4$. Par conséquent, le cinquième terme est $126x^6$.

c. Pour le terme constant, $18 - 3r = 0$, donc $r = 6$. Ainsi, le septième terme est la constante qui est égale à 84.

D'autres exercices sur le développement des binômes comprennent le développement des binômes en utilisant le théorème des binômes, puis en effectuant une multiplication avec un autre binôme.

Exemple 1 : Développer $(x^2 + 2)(x + 1/x)^5$.

Réponse : $x^7 + 7x^5 + 20x^3 + 30x + 25/x + 11/x^3 + 2/x^5$.

Exemple 2 : Trouver les trois premiers termes que l'on retrouve dans le développement de $(x + 1)^5(x - 2)^6$.

Réponse : $x^{11} - 7x^{10} + 10x^9 + ...$

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Pour trouver un programme informatique qui imprime le développement des binômes, reportez-vous à « Computer-Application Binomial Expansion », HM12, page 755.

Pour un programme qui permette d'imprimer le Triangle de Pascal, reportez-vous à Mathematics Teacher, volume 76, numéro 9, décembre 1983, page 686.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Binomial Probability, MPP12 : pages 426 à 428.

Développements multinomiaux : développez $(x + y + z + t)^3$. Consultez Mathematics of Choice or How to Count Without Counting, d'Ivan Niven (The Mathematical Association of America).

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5 : pages 334 et 335

SUITES ET SÉRIES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 10%

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une suite est un ensemble de quantités déterminées par une règle (fonction) dont le domaine est composé des nombres naturels et dont les termes de la suite en sont l'image.	Les élèves devront être en mesure de reconnaître les suites finies et infinies. Les élèves devront être en mesure d'écrire les termes d'une suite d'après la fonction qui la définit. Les élèves devront être en mesure d'écrire les termes d'une suite selon sa définition récurrente. Les élèves devront être en mesure de déterminer la fonction qui décrit une suite simple.	
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une série est la somme des termes d'une suite.	Les élèves devront être en mesure de développer une série définie par la notation sigma.	
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que dans une suite arithmétique, chacun des termes est égal à la somme du terme précédent et d'une constante, et qu'une série arithmétique est la somme indiquée des termes d'une suite arithmétique.	Les élèves devront être en mesure d'appliquer la formule du terme général des suites arithmétiques, $t_n = a + (n - 1)d$. Les élèves devront être en mesure d'appliquer la formule de la somme pour les séries arithmétiques, $S_n = \frac{n(a + t_n)}{2}$ et $S_n = \frac{n[2a + (n - 1)d]}{2}$	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule du terme général pour les suites arithmétiques. Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule de la somme pour les séries arithmétiques. Lorsque la situation le permet, les élèves devront être en mesure d'utiliser les outils technologiques.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que dans une suite géométrique, chacun des termes est égal au produit du terme précédent et d'une constante, et qu'une série géométrique est la somme indiquée des termes d'une suite géométrique.	Les élèves devront être en mesure d'appliquer la formule du terme général des suites géométriques, $t_n = ar^{n-1}$. Les élèves devront être en mesure d'appliquer la formule de la somme pour les séries géométriques, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule du terme général pour les suites géométriques. Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule de la somme pour les séries géométriques. Lorsque la situation le permet, les élèves devront être en mesure d'utiliser les outils technologiques.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une suite est un ensemble de quantités déterminées par une règle (fonction) dont le domaine est composé des nombres naturels et dont les termes de la suite en sont l'image.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 reconnaître les suites finies et infinies;
1.2 écrire les termes d'une suite d'après la fonction qui la définit;
1.3 écrire les termes d'une suite d'après sa définition récurrente;
1.4 déterminer la fonction qui décrit une suite simple.

REMARQUES

Une méthode efficace pour introduire cette section consiste à utiliser des problèmes qui produisent des suites. La plupart des élèves résoudront ces problèmes en tentant d'en résoudre un plus simple, puis en recherchant un modèle fiable. Les nombres obtenus forment une suite. Cette stratégie est couramment utilisée en Mathématiques 10 pour introduire des concepts algébriques. La terminologie, de même que les concepts de base des suites, peuvent être enseignés par l'entremise de ces questions. Cela est souvent plus efficace que d'introduire les séries sur une base théorique.

La prochaine étape consiste à rechercher une relation fonctionnelle entre les variables concernées. Un grand nombre de ces fonctions possibles ont été étudiées en Mathématiques 20 et en Mathématiques 30. Toutefois, il existe une différence majeure : le domaine est restreint à l'ensemble des nombres naturels. Il est important que les élèves se rendent compte que toutes les fonctions qu'ils ont étudiées jusqu'à maintenant peuvent former une suite. La représentation graphique des suites s'avère être une façon efficace de mettre en évidence les liens et les contrastes qui existent par rapport aux concepts précédents.

La notation utilisée pour les suites peut être quelque peu déroutante. Il serait utile de comparer et d'opposer la notation des fonctions et celle des suites.

Exemple :
$f(3) = t_3$ signifie que le troisième terme est obtenu en évaluant le terme général pour $n = 3$ (voir l'activité 1).

De nombreuses suites qui sont produites seront définies par les lois des fonctions polynomiales. Les élèves devraient avoir la possibilité de trouver ces lois par différents moyens, soit en émettant des hypothèses et en les vérifiant, soit en établissant un modèle connu

ou en utilisant une technique spécifique comme celle des différences finies. Un excellent article, qui a été inséré dans ce document, démontre la façon de développer et d'appliquer cette technique[1]. La connaissance de cette technique n'est pas obligatoire pour ce programme, mais peut devenir un outil d'enseignement très efficace.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 :

a. Donner un exemple d'une fonction polynomiale, d'une fonction logarithmique, exponentielle et trigonométrique.
b. Établir la liste des cinq premiers termes de la suite obtenue. (Employer la notation des fonctions et celle des séries pour énumérer ces termes.)
c. Tracer le graphique de chaque ensemble de cinq points.
d. Inscrire au-dessous de chaque graphique le domaine et l'image de la fonction.

Exemple :

$q(n) = 2^n$ est une fonction exponentielle

$q(1) = t_1 = 2$; $q(2) = t_2 = 4$; $q(3) = t_3 = 8$, etc.

Problème 1 : Trente délégués prennent part à une conférence sur l'environnement. Chaque délégué donne une poignée de main aux autres délégués; combien y aura-t-il de poignées de mains au total ?

Solution : Les élèves seront probablement en mesure de prédire le nombre total de poignées de mains en élaborant un modèle semblable à celui qui suit. Le problème qui peut être évoqué consiste à se demander s'il est possible d'écrire une formule qui calcule le nombre de poignées de mains en tant que fonction du nombre de personnes dans la pièce. Utilisez la notation fonctionnelle lorsque cela est possible. (Exemple : $p(4) = 6$ signifie qu'avec quatre personnes, il y a eu six poignées de mains). La solution donnée ci-dessous utilise les différences finies, mais il existe d'autres méthodes possibles. Si les élèves comptent n personnes dans une pièce, par exemple, alors il y a $(n - 1)$ personnes à qui donner une poignée de mains. Cela donnerait un total de $n(n - 1)$ poignées de main. Toutefois, chaque poignée de main aurait été donnée deux fois et le nombre réel serait alors la moitié de ce résultat, soit $\frac{n(n - 1)}{2}$.

[1] Henry Guillote, « The Method of Finite Differences : Some Applications », Mathematics Teacher, volume 79, numéro 6, page 466.

Nombres de personnes (n)	Nombres de poignées de main	Diff. N°1	Diff. N°2
1	0		
		1	
2	1		1
		2	
3	3		1
		3	
4	6		1
		4	
5	10		1
		5	
6	15		

En utilisant les résultats de la méthode des différences finies, la relation devra être du second degré et de la forme $an^2 + bn + c$.

De même, en utilisant les différences finies, nous obtenons :

$a = ½$, $b = -½$, $c = 0$.

Donc : $t_n = p(n) = ½n^2 - ½n$ ou $t_n = \frac{n(n - 1)}{2}$

et $t_{30} = p(30) = 435$ poignées de mains.

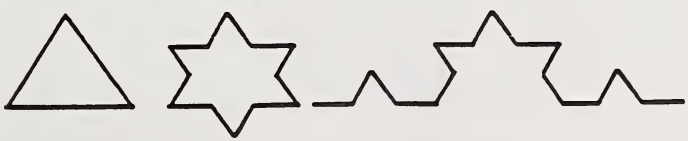
Il existe un autre problème que les élèves ont, peut-être, rencontré en Mathématiques 10. Une relation fonctionnelle peut être difficile à trouver sans l'utilisation d'une technique spécifique, comme celle des différences finies. Les exercices donnés devraient se limiter à déterminer des fonctions qui décrivent des suites simples. Celles-ci pourraient comprendre les fonctions quadratiques ou les fonctions cubiques avec des termes angulaires ou des suites arithmétiques et géométriques.

Problème 2 : Combien est-il possible de tracer de carreaux sur un échiquier de 8 × 8 ?

Taille de l'échiquier	Carreaux (c)	Diff. N°1	Diff. N°2	Diff. #3
1 × 1	1			
		4		
2 × 2	5		5	
		9		2
3 × 3	14		7	
		16		2
4 × 4	30		9	
		25		2
5 × 5	55		11	
		36		
6 × 6	91			

La relation est de la forme $s(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$. En résolvant pour les coefficients, nous obtenons $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1/6$ et $d = 0$. Par conséquent, $t_8 = s(8) = 204$ carreaux.

Activité : L'exploration de « la courbe du flocon de neige » peut constituer une activité très intéressante pouvant être présentée en guise d'introduction ou comme approfondissement de l'enseignement. Cette figure est formée en subdivisant les côtés d'un triangle équilatéral. Dans chacune des étapes de la construction, chaque côté est remplacé par quatre nouveaux côtés dont la longueur est le tiers du côté remplacé. On peut concevoir de nombreuses suites avec les figures obtenues. Le nombre de côtés, la longueur de chacun des côtés ou le périmètre total sont des données qui pourraient être examinées. On explore ce cas en détail dans l'article de John Egsgard[2].



[2] John Egsgard.

(Pour obtenir un programme qui produit ces courbes, reportez-vous à Mathematics 23, MRE, page 177).

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une série est la somme des termes d'une suite.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 développer une série définie par la notation sigma.

REMARQUES

Une série est formée par la somme des termes d'une suite. Cela peut être introduit à l'aide de problèmes dont les solutions exigent d'additionner les termes. Il est important de mettre l'accent sur les liens qui existent entre les suites et les séries. L'utilisation de la notation sigma permet d'établir un excellent rapprochement.

Exemple :

$$\sum_{n=1}^{5} (2n + 1)$$

Dans ce cas, (2n + 1) représente le terme général de la suite. La série est la somme des cinq premiers termes de cette suite.

La somme, S, qui est obtenue est une fonction du nombre de termes, n, qui sont additionnés (soit S(n) si nous utilisons la notation des fonctions ou S_n pour la notation des séries).

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1 : Si la chanson « The Twelve Days of Christmas » se prolongeait jusqu'à 30 jours, combien de cadeaux auraient été offerts à la fin des trente jours ? La première journée, un cadeau a été offert, la deuxième journée, deux cadeaux ont été offerts jusqu'à ce que 30 cadeaux aient été offerts la dernière journée. Certains élèves ne verront pas la différence entre le fait de rechercher le nombre de cadeaux offerts la trentième journée et le total des cadeaux offerts.

Solution :

$$\sum_{n=1}^{30} (n)$$

serait la notation en sigma. Les élèves pourraient alors déterminer la somme des termes. Consultez également la section APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Le problème 1 peut être résolu comme suit.

Solution : Nous recherchons S(30) si nous croyons que « S », le nombre total de cadeaux, est une fonction de « n », le nombre de jours.

Jours(n)	Nombre de cadeaux offerts	Nombre total de cadeaux offerts	Diff. N°1	Diff. N°2
1	1	1		
			2	
2	2	3		1
			3	
3	3	6		1
			4	
4	4	10		1
			5	
5	5	15		

Le terme général de la suite des sommes partielles (la troisième colonne) est un polynôme du second degré (en utilisant les différences finies). La forme générale de ce terme est :
$S(n) = an^2 + bn + c$.

L'utilisation des résultats obtenus par la méthode des différences finies nous donne le résultat suivant :
$a = ½$; $b = ½$; $c = 0$.

Donc, en utilisant la notation fonctionnelle :
$S(n) = ½n^2 + ½n$.

En utilisant la notation des séries, nous obtenons :
$S_n = ½n^2 + ½n$, S_n représentant la somme de n termes d'une suite.

Voici une autre façon de présenter ce résultat :
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = ½n^2 + ½n$.

La solution de ce problème est donc $S_{30} = S(30) = 465$ cadeaux.

On peut demander aux élèves de trouver la formule pour la somme d'une certaine série. S'il est possible d'écrire la formule sous la forme d'un polynôme, il est également possible d'employer la méthode des différences finies. On peut y arriver en formant la

suite de sommes partielles. Pour de plus amples informations à ce sujet, reportez-vous à l'article inséré dans ce document[3]. D'autres méthodes pour trouver la règle générale, comme celle qui consiste à faire des essais et à vérifier, constituent des techniques de résolution valables.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

[3] Henry P. Guillote, « The Method of Finite Differences : Some Applications », Mathematics Teacher, volume 79, numéro 6, septembre 1986, page 466.

CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que dans une suite arithmétique, chacun des termes est égal à la somme du terme précédent et d'une constante, et qu'une série arithmétique est la somme indiquée des termes d'une suite arithmétique.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1 appliquer la formule du terme général des suites arithmétiques, $t_n = a + (n - 1)d$;

3.1.1 résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule du terme général pour les suites arithmétiques;

3.2 appliquer la formule de la somme pour les séries arithmétiques, $S_n = \frac{n(a - t_n)}{2}$ et $S_n = \frac{n[2a + (n - 1)d]}{2}$;

3.2.1 résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule de la somme pour les séries arithmétiques;

3.2.2 lorsque la situation le permet, utiliser les outils technologiques.

REMARQUES

Ce concept traite des suites et séries arithmétiques. Il existe une foule de problèmes et de questions qui portent sur ce concept. L'accent doit être mis sur son application plutôt que sur l'emploi des formules dans le seul but d'effectuer des calculs.

Il arrive qu'un mathématicien soit associé à un sujet particulier. Le nom de Carl Friedrich Gauss, par exemple, est souvent cité en relation avec ce concept. L'histoire qui est relatée ci-dessous a pour but d'aider l'enseignant à souligner les efforts déployés dans le domaine des mathématiques et peut-être de préparer les élèves à rédiger quelques lignes sur l'histoire des mathématiques.

> « Lorsque Gauss était âgé d'environ 10 ans, il assista à son premier cours de mathématiques. L'instituteur, M. Buttner, demanda aux élèves de noter par écrit les nombres de 1 à 100, puis de les additionner. Une fois le calcul terminé, les élèves devaient, comme à l'habitude, déposer leur cahier sur le bureau de l'instituteur. Peu après que M. Buttner eut terminé d'énoncer le problème, le jeune Gauss lança son cahier sur le bureau. Les autres élèves peinèrent pendant le reste de l'heure allouée, tandis que Carl demeurait assis, les bras croisés, sous le regard méprisant et rempli de sarcasme de l'instituteur. À la fin de la période, M. Buttner examina les cahiers des élèves et se rendit compte que seul Carl avait réussi à trouver la bonne réponse. Lorsqu'on lui demanda comment il y était arrivé, il répondit que « 100 + 1 = 101,

99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101, etc., et qu'il y avait un nombre de « paires » égal à celui contenu dans 100. La réponse était donc 50 × 101, ou 5 050 ».[4]

Pour aborder ce concept, il est conseillé, plutôt que de simplement énoncer une formule et présenter différents exemples d'emploi de celle-ci, de demander aux élèves d'examiner diverses suites et d'identifier leurs ressemblances et leurs différences. Examinez également les termes d'une suite en recherchant des modèles. Puis, si des modèles sont repérés, demandez aux élèves de tenter de formaliser les modèles en fonction de « n », le nombre de termes ou la position du terme spécifique dans la suite. Au lieu que l'enseignant examine des exemples et que les élèves prennent des notes, il vaut mieux donner un problème aux élèves et leur allouer suffisamment de temps pour leur permettre de le résoudre par eux-mêmes. Vous pouvez, par exemple, procéder comme l'instituteur Buttner et constater si vous avez des « Gauss » en herbe dans votre classe.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Lors de la résolution de problèmes de type application, il est important de signaler aux élèves que la compréhension du problème consiste en partie à être en mesure d'établir les suites ou les séries à utiliser.

Problème : Louise gagne le salaire suivant : elle débute à 5 $ l'heure et, après une semaine (si on décide de la garder), elle reçoit une augmentation de 1 $ l'heure. Chacune des semaines suivantes, elle recevra une augmentation de 0,25 $ l'heure jusqu'à un maximum de 10 $ l'heure. À quelle semaine de travail Louise gagnera-t-elle 8,25 $ l'heure ?

Solution : L'élément le plus important à souligner est la définition de la suite. Dans ce cas, les 5 $ ne font pas partie de la suite et doivent donc être traités distinctement. La suite est établie ainsi : 6; 6,25; 6,5; 6,75; ... 8,25.

Les élèves peuvent trouver la réponse en calculant « n » à l'aide de la formule des suites arithmétiques, puis en additionnant 1.

Problème : La formule pour la somme des « n » premiers termes d'une série arithmétique est la suivante : $S_n = 3n^2 + 2n$. Déterminer la valeur de la raison de la suite, d, et la valeur du $n^{è}$ terme de la série originale. Des problèmes comme celui-ci renvoient les élèves à la base de la signification des différentes formules. À l'aide de la

[4] Howard W. Eves, in Mathematical Circles (Quadrants III and IV), Boston, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1969, page 112.

formule donnée, les élèves peuvent déterminer que $S_1 = 5$, $S_2 = 16$ et $S_3 = 33$, etc. Ceci les amène à conclure que le premier terme de la série originale est 5, que le deuxième est 16 - 5 = 11 et que le troisième est 33 - 16 = 17. Par conséquent, la raison de la suite est 6 et la valeur du $n^{è}$ terme est 6n - 1.

Problème : Combien faut-il de termes de la série 3 + 7 + 11 ... pour produire une somme de 663 ?

La solution de ce problème permet le développement de la formule :

$$S_n = \frac{n[2a + (n - 1)d]}{2}$$

qui est formée à partir des deux autres formules introduites dans ce concept. La plupart des ouvrages traitent de ce développement et de cet emploi. En plus de permettre de résoudre ce problème, elle peut également servir de méthode de rechange pour résoudre les problèmes dans lesquels la raison de la suite est connue.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Pour résoudre les problèmes, l'utilisation d'une calculatrice programmable ou d'un ordinateur peut être encouragé. La capacité de la calculatrice et de l'ordinateur d'effectuer des « itérations » permet à l'élève de faire des expériences. Ces moyens technologiques doivent servir à exécuter les tâches laborieuses, l'élève pouvant se concentrer sur l'interprétation et l'application des réponses.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

CONCEPT 4

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que dans une suite géométrique, chacun des termes est égal au produit du terme précédent et d'une constante, et qu'une série géométrique est la somme indiquée des termes d'une suite géométrique.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

4.1 appliquer la formule du terme général des suites géométriques, $t_n = ar^{n-1}$;

4.1.1 résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule du terme général pour les suites géométriques;

4.2 appliquer la formule de la somme pour les séries géométriques, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$

4.2.1 résoudre des problèmes qui nécessitent l'utilisation et l'application de la formule de la somme pour les séries géométriques.

4.2.2 lorsque la situation le permet, utiliser les outils technologiques.

REMARQUES

Ce concept porte sur les suites géométriques et les séries géométriques finies.

Il est important que les élèves puissent faire la distinction entre une suite arithmétique et une suite géométrique. Il est conseillé de montrer immédiatement aux élèves comment identifier une suite géométrique d'après son rapport constant.

Les suites géométriques peuvent être introduites à l'aide de problèmes comportant une croissance et une décroissance exponentielle. L'enseignant peut également citer des problèmes portant sur l'augmentation d'un certain montant d'argent en fonction d'un taux d'intérêt composé. Les élèves qui ont suivi le cours de Mathématiques 33 connaissent ce concept. De plus, de nombreux élèves ont entendu parler des « chaînes de lettres ». Un problème intéressant consiste à déterminer le nombre de lettres d'une « chaîne ». En supposant que la chaîne n'est pas rompue, le nombre de personnes jointes au cours du processus de communication forme une suite géométrique[5].

Dans cette section, il convient de faire constamment référence à l'unité d'apprentissage portant sur les fonctions exponentielles et

[5] Reportez-vous à « The Chain Letter : An Example of Exponential Growth », Mathematics Teacher, volume 80, numéro 3, février 1987.

logarithmiques. Tous les problèmes de croissance et de décroissance exponentielle représentent en fait des suites ou des séries géométriques. Les problèmes de croissance et de décroissance n'exigent pas tous de doubler ou de réduire de moitié. Il s'agit de tout mettre en œuvre pour s'assurer que les élèves comprennent que tous les problèmes de ce type utilisent la fonction suivante :

$$M(t) = oc^{t/p}$$

M étant un montant (nombre, etc.)
t le temps
o la mesure originale
c le « facteur de croissance » et
p la période de croissance de c.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Même si l'étude des rentes à intérêts composés n'est pas spécifiée, ce type de problème représente une excellente application des suites géométriques. Il faut toutefois faire attention à la difficulté des problèmes soumis aux élèves. Le terme de l'intérêt composé et le délai de paiement doivent être égaux. Il suffit de comprendre que ces sujets constituent des exemples de séries géométriques, car dans la vie de tous les jours ces problèmes sont résolus à l'aide de tables et de logiciels informatiques.

Activité 1 : Demandez aux élèves de calculer le montant d'argent que contiendrait leur compte en banque chaque année, sur 25 ans, s'ils déposent 100 $ aujourd'hui et laissent cette somme fructifier à un taux d'intérêt de 10 % composé annuellement.

En combien d'années le montant d'argent doublera-t-il ? On peut réviser la résolution d'équations exponentielles à l'aide de logarithmes dans le but de calculer le temps requis pour qu'une somme donnée fructifie et atteigne un montant spécifique en utilisant la formule $M = C(1 + i)^n$, si l'unité d'apprentissage portant sur les logarithmes a été enseignée. Si les élèves se servent de logarithmes, amenez-les à émettre des commentaires sur les réponses exprimées sous forme de nombre fractionnaire et le rapport avec le domaine spécifié.

Activité 2 : Demandez aux élèves de calculer la somme qui sera amassée dans un compte d'épargne si on investit 100 $ chaque année, pendant une certaine période, à un taux d'intérêt de 10 % composé annuellement. Comparez ce montant à celui de l'activité 1. Il s'agit ensuite de tracer le graphique de chacun de ces montants en fonction du temps. Quelle partie du montant qui se trouve dans le compte constitue les intérêts ?

Activité 3 : À l'école, un emploi de laveur de fenêtres est offert. Il y a un total de 35 fenêtres à laver. Deux types de rémunération sont proposés :

a) 8 $ par fenêtre;

b) 1 cent pour la première fenêtre, 2 cents pour la deuxième, 4 cents pour la troisième, 8 cents pour la quatrième, 16 cents pour la cinquième et ainsi de suite. Quel type de rémunération est le plus avantageux ? La plupart des élèves choisiront le type a sans réfléchir. Demandez aux élèves d'établir une table semblable à celle qui suit.

Fenêtre	Prix par fenêtre	Total b)	Total a)
1	0,01	0,01	8 $
2	0,02	0,03	16 $
3	0,04	0,07	24 $
4	0,08	0,15	32 $
5	0,16	0,31	40 $
•			
•			
•			

L'article intitulé « Geometric Growth and the Hand-Held Calculator », Mathematics Teacher, volume 73, numéro 8, novembre 1980, présente ce problème et introduit d'autres activités servant à initier les élèves aux séries géométriques et à leurs sommes.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

On peut aussi se servir d'un logiciel tableur pour calculer, dans les activités précédentes, de quelle façon l'argent fructifie.

L'utilisation de calculatrices est recommandée, surtout dans les activités ci-dessus, en raison de leur capacité d'effectuer des itérations dans ce type de calcul.

Pour obtenir une application informatique comportant la somme d'une série géométrique, reportez-vous à Holtmath 12, page 454.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Ce concept peut être approfondi et toucher les suites et les séries géométriques infinies. On peut également effectuer une étude plus approfondie des intérêts composés et des rentes. Pour plus de détails à ce sujet, reportez-vous à Holtmath 12, pages 434 à 451, à MPP12, pages 377 à 396 et à AW30, pages 361 à 364.

Deux articles sur les séries géométriques, publiés dans Mathematics Teacher, sont dignes d'intérêt.

1. « Visualizing the Geometric Series », volume 82, numéro 2, février 1989.

2. « A Geometric View of the Geometric Series », volume 77, numéro 6, septembre 1985.

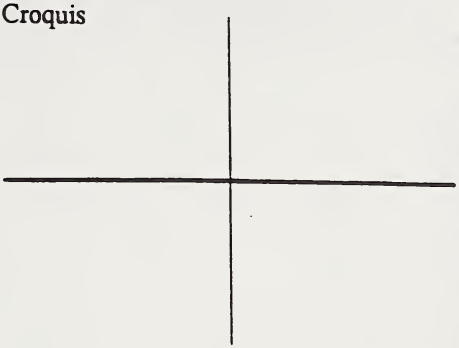
CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

Activité :

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Observations et conjectures

Croquis

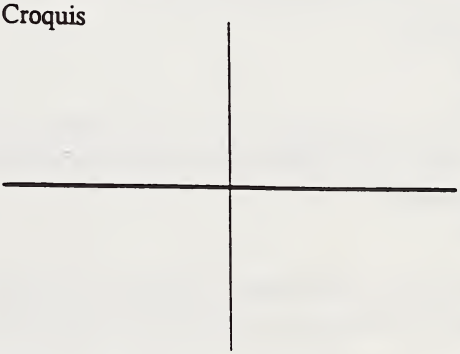


Activité :

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Observations et conjectures

Croquis

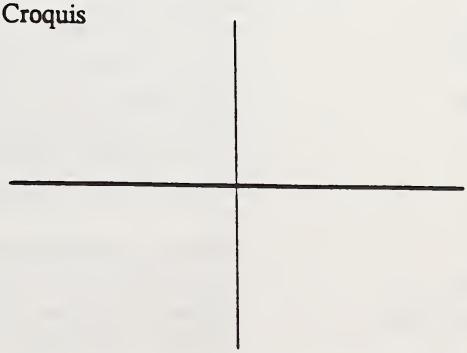


Activité :

A = B = C = D = E = F =
Équation :

Observations et conjectures

Croquis



ÉCHANTILLON DE PROGRAMMES GRAPHIQUES POUR CALCULATRICE ET ORDINATEUR

Calculatrice graphique T1-81

Programme 1 : CONIQUES

```
:Disp "A"
:Input A
:Disp "B"
:Input B
:Disp "C"
:Input C
:Disp "D"
:Input D
:Disp "E"
:Input E
:Disp "F"
:Input F
:If C ≠ 0
:Goto 3
:"(-1*A*X^2-D*X-F)/(B*X+E)"->Y1
:DispGraph
:End
:Lbl 3
:"(-1*(B*X+E)+√((B*X+E)^2-4*C*(A*X^2+D*X+F)))/(2*C)"->Y1
:"(-1*(B*X+E)-√((B*X+E)^2-4*C*(A*X^2+D*X+F)))/(2*C)"->Y2
:DispGraph
:End
```

Pour entrer le programme : appuyer sur la touche PRGM, puis sur la flèche droite pour EDIT et enfin ENTER. Appuyer sur ENTER après chaque ligne.

Symbole	Touches
"	ALPHA, puis la touche +
A	ALPHA, puis A
B	ALPHA, puis B
Disp	PRGM, puis flèche droite pour I/O, touche la flèche haut ou bas pour mettre en évidence la sélection et ENTER
Input	PRGM, puis flèche droite pour I/O, flèche haut ou bas pour mettre en évidence la sélection et ENTER
≠	2nd, puis Math, flèche pour la sélection et ENTER
Y_1	2nd, puis VARS, flèche pour sélection et ENTER
->	STO
If	PRGM, puis flèche pour If et ENTER
Goto	PRGM, puis flèche pour Goto et ENTER
DispGraph	PRGM, puis flèche droite pour I/O, flèche haut ou bas pour mettre en évidence la sélection et ENTER

END	PRGM, puis flèche pour END et ENTER
Lbl	PRGM, puis ENTER

Une fois le programme entré, appuyer sur la touche 2nd, puis sur CLEAR.
Pour faire exécuter le programme, appuyer sur PRGM, puis sur ENTER et encore sur ENTER.
ZOOM (flèche pour Square, puis ENTER). Cette opération corrige l'écran qui, autrement ferait paraître un cercle comme une ellipse.

Pour programmer : appuyer sur MODE, 2, touche la flèche bas jusqu'à un numéro de programme vide, EXE.
La touche ALPHA sert à obtenir des lettres.

CONIQUES
"A="?→A:"B="?→B:"C="?→C exe
"D="?→D:"E="?→E:"F="?→F exe
C=0⇒(-1×A×X×y²-D×X-F)÷(B×X+E)▸
Graph y=((-1×(B×X+E)+√((B×X+E)×y²-4×C×(A×X×y²+D×X+F)))÷(2×C) exe
Graph y=((-1×(B×X+E)-√((B×X+E)×y²-4×C×(A×X×y²+D×X+F)))÷(2×C) ▸

Une fois le programme entré : MODE, 1, AC.

Pour faire exécuter le programme : SHIFT, PRGM, F3, numéro du programme, EXE.

Remarques

Pour obtenir les symboles et les touches suivantes :

"	ALPHA, F2
=	SHIFT, PRGM, F2, F1
?	SHIFT, PRGM, F4
:	SHIFT, PRGM, F6
⇒	SHIFT, PRGM, F1, F1
Graph y=	Touche Graph
▸	SHIFT, PRGM, F5
√, →, (,),	Touches indiquées

RANGE : Régler l'étendue afin que l'échelle sur l'axe des x soit -14,1 à 14,1 et celle sur l'axe des y soit -9,3 à 9,3 (les cercles auront ainsi l'air de véritables cercles).

Pour vider l'écran : SHIFT, F5, EXE

Le programme qui suit est conçu pour tourner sous MS-DOS. Il trace le graphique de coniques et de coniques dégénérées, sous la forme $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Pour entrer le programme, chargez l'interpréteur GWBASIC, tapez les instructions et sauvegardez en entrant SAVE "CONIQUE". Pour le faire exécuter, chargez GWBASIC et entrez LOAD "CONIQUE", puis RUN.

```
100   KEY OFF:SCREEN 1:CLS 2:COLOUR 1,1
110   XMIN=-10:XMAX=10:YMIN=-10:YMAX=10
120   GOSUB 1000:'Définition de l'écran
130   LOCATE 5,1:INPUT "A= ",A:INPUT "B= ",B:INPUT "C= ",C
140   INPUT "D =",D:INPUT "E= ",E:INPUT "F= ",F:PRINT
150   DEF FN T(X) = (B×X+E)^2-4×C×(A×X^2+D×X+F)
160   DEF FN F(X) = (-(B×X+E)+SQR(FN T(X)))/(2×C)
170   DEF FN G(X) = (-(B×X+E)-SQR(FN T(X)))/(2×C)
180   DEF FN H(X) = (-A×X^2-D×X-F)/(B×X+E)
190   IF C=0 AND B=0 AND E=0 GOTO 210
200   GOSUB 3000:GOTO 220:'Traçage des graphiques
210   GOSUB 2000:'Graphiques de droites verticales
220   IF REL=1 THEN PRINT "Pas une " :PRINT "relation." :GOTO 280
230   LOCATE 14,1:PRINT "Nouvelle échelle":INPUT "(o/n)"; A$
240   IF A$ <> "o" AND A$ <> "O" GOTO 280
250   LOCATE 15,1:INPUT "x inférieur";XMIN:INPUT "x supérieur";XMAX
260   INPUT "y inférieur";YMIN:YMAX=YMIN+XMAX-XMIN
270   GOSUB 1000:GOTO 190:'Nouvel écran
280   PRINT:PRINT "Nouveau graphique":INPUT "O/N";A$
290   IF A$ = "o" OU A$ = "O" THEN A$ = "":REL = 0:CLS 2:GOTO 120
300   SCREEN 0,0,0:WIDTH 80:END
1000  '---------- Définition de l'écran ----------
1010  LOCATE 1,3:PRINT "Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0"
1020  LOCATE 14,1:FOR I = 1 TO 6:PRINT "      ":NEXT I
1030  LOCATE 3,1:PRINT "Coniques":LOCATE 20,1:PRINT "Échelle":PRINT
1040  PRINT "x= "XMIN;"à "XMAX;"":PRINT "y = "YMIN;"à "YMAX;""
1050  VIEW (110,18) - (310,190), 2:WINDOW (XMIN,YMIN) - (XMAX,YMAX)
1060  LINE (XMIN,0) - (XMAX,0):LINE (0,YMIN) - (0,XMAX)
1070  FOR X=XMIN TO XMAX:LINE (X, -.1) - (X, .1):NEXT X
1080  FOR Y=YMIN TO YMAX:LINE (-.1, Y) - (.1, Y):NEXT Y
1090  RETURN
2000  '---------- Graphiques de droites verticales ----------
2010  IF A=0 AND D=0 THEN REL=1:GOTO 2060
2020  IF A=0 THEN LINE (F/D,YMIN) - (F/D,YMAX):GOTO 2060
2030  IF D^2 - 4 × A × F < 0 THEN REL=1:GOTO 2060
2040  X1=(-D - SQR(D^2-4×A×F))/(2×A):X2=(-D + SQR(D^2-4×A×R))/(2×A)
2050  LINE (X1,YMIN) - (X1,YMAX),1:LINE (X2,YMIN) - (X2,YMAX),1
2060  RETURN
3000  '---------- Traçage de graphiques ----------
3010  INC=(XMAX-XMIN)/200:REL=1
3020  FOR X=XMIN TO XMAX STEP INC
3030  X=INT(X×100+.5)/100
3040  IF C=0 THEN ABS(B×X+E)<.001 GOTO 3080
```

```
3050  IF C=0 THEN PSET(X,FN H(X)),1:REL=0:GOTO 3080
3060  IF FN T(X) < 0 GOTO 3080
3070  PSET(X,FN G(X)),1:PSET(X,FN F(X)),1:REL=0
3080  NEXT X
3090  RETURN
```

Le programme qui précède peut être modifié afin de tracer le graphique de coniques à l'aide de la définition de foyer et de directrice. Autrement dit, une conique sera tracée si l'emplacement du foyer est donné, si une directrice sous la forme Ax + By + C = 0 est fournie et si l'excentricité est également fournie.

Pour obtenir ce programme, supprimez d'abord les lignes 130, 140, 1010 et 1030.

Entrez ensuite les lignes suivantes, puis sauvegardez votre programme en entrant SAVE "FDCONIQUE".

```
125 LOCATE 4,1:INPUT "X= ",F:INPUT"Y= ",V
130 PRINT "Directrice":PRINT "Ax + By + C = 0"
135 INPUT "A= ",A:INPUT "B= ",B:INPUT "C= ",C
140 PRINT "Excentricité":INPUT"e= ",E:PRINT
142 A1=E^2×A^2-A^2-B^2:B1=2×A×B×E^2:C1=E^2×B^2-A^2-B^2
144 D1=2×A×C×E^2+2×A^2×F+2×B^2×F:E1=2×B×C×E^2+2×A^2×V+2×B^2×V
146 F1=E^2×C^2-A^2×F^2-A^2×V^2-B^2×F^2-B^2×V^2
148 A=A1:B=B1:C=C1:D=D1:E=E1:F=F1

1010 LOCATE 1,1:PRINT "Coniques : Définition de foyer et directrice"
1030 LOCATE 3,1:PRINT "FOYER F(x,y)":LOCATE 20,1:PRINT "Échelle" :PRINT
```

Le programme qui suit est conçu pour les ordinateurs Apple. Il trace le graphique de coniques et de coniques dégénérées sous la forme $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Pour entrer le programme, tapez les instructions puis sauvegardez en entrant SAVE CONIQUE GENERALE.

La vitesse d'exécution du programme dépend grandement de la qualité du graphique. Il est possible d'augmenter la vitesse en réduisant la valeur du nombre 60 (ligne 5010).

```
100   CLEAR:DEF FN P(X)+XC+UN×X:DEF FN Q(Y)=YC-UN×Y
110   XL=-6:XH=6:YL=-6:YH=6
120   GOSUB 2000:REM DÉFINITION DE L'ÉCRAN
130   IF SC <> 1 THEN GOSUB 1000:REM INTERACTION
140   IF SC <> 1 THEN GOSUB 3000:REM DÉFINITION FONCTION
150   VTAB 23:PRINT "ÉCHELLE X= ";XL;"A ";XH
160   VTAB 23:HTAB 28:PRINT "Y= ";YL;"A ";YH
170   IF B=0 AND C=0 AND E=0 THEN GOSUB 4000:GOTO 190
180   GOSUB 5000:REM TRACAGE DE GRAPHIQUES
190   IF REL=1 THEN PRINT "N'EST PAS UNE RELATION";:GOTO 220
200   SC=0:VTAB 24:INPUT "NOUVELLE ÉCHELLE (O/N) ?";A$
210   IF A$="O" THEN A$= "":GOSUB 6000:REM NOUVELLE ÉCHELLE
220   IF SC <> 1 THEN VTAB 24:INPUT "NOUVEAU GRAPHIQUE (O/N) ?";A$
230   IF A$="O" THEN GOTO 100
240   IF SC=1 THEN GOTO 120
250   END:REM ------------------------------
1000  REM INTERACTION
1010  VTAB 21:PRINT "AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0"
1020  VTAB 22:HTAB 1:INPUT "A= ";A$:A=VAL(A$)
1030  VTAB 22:HTAB 7:INPUT "B= ";B$:B=VAL(B$)
1040  VTAB 22:HTAB 13:INPUT "C= ";C$:C=VAL(C$)
1050  VTAB 22:HTAB 19:INPUT "D= ";D$:D=VAL(D$)
1060  VTAB 22:HTAB 25:INPUT "E= ";E$:E=VAL(E$)
1070  VTAB 22:HTAB 31:INPUT "F= ";F$:F=VAL(F$)
1080  RETURN
2000  REM DÉFINITION DE L'ÉCRAN ----------------------
2005  WI=XH-XL:UN=INT(160/WI)
2010  XC=140-INT((XH+XL)/2×UN)
2020  YC=80+INT((YH+YL)/2×UN)
2030  HOME:HGR:HCOLOR=3
2040  FOR I=XL TO XH
2050  HPLOT FN P(I), FN Q(0) TO FN P(I), FN Q(.1)
2060  NEXT I
2070  FOR I=YL TO YH
2080  HPLOT FN P(0), FN Q(I) TO FN P(.1), FN Q(I)
2090  NEXT I
2100  HPLOT FN P(XL), FN Q(0) TO FN P(XH), FN Q(0)
2110  HPLOT FN P(0), FN Q(YL) TO FN P(0), FN Q(YH)
2120  RETURN
3000  REM DÉFINITION FONCTION ------------------
3010  DEF FN T(X)=(B×X+E^2)-4×C×(A×X^2+D×X+F)
3020  DEF FN F(X)=(-(B×X+E)+SQR(FN T(X)))/(2×C)
```

```
3030  DEF FN G(X)=(-(B×X+E)-SQR(FN T(X)))/(2×C)
3040  DEF FN H(X)=(-A×X^2-D×X-F)/(B×X+E)
3050  RETURN
4000  REM DROITES VERTICALES ----------
4010  IF A=0 AND D=0 THEN REL=1:GOTO 4060
4015  IF A=0 THEN XX=FN P(F/D)
4020  IF A=0 THEN HPLOT XX, FN Q(YL) TO XX, FN Q(YH):GOTO 4060
4030  DI=D^2-4×A×F:IF DI < 0 THEN REL=0:GOTO 4060
4040  X1=(-D-SQR(DI))/(2×A):X2+(-D+SQR(DI))/(2×A)
4050  HPLOT FN P(X1), FN Q(YL) TO FN P(X1), FN Q(YH)
4055  HPLOT FN P(X2), FN Q(YL) TO FN P(X2), FN Q(YH)
4060  RETURN
5000  REM TRAÇAGE DE GRAPHIQUES ----------
5010  INC=WI/60:REL=1:IF INC < .1 THEN INC=.1
5020  FOR I=XL TO XH STEP INC
5022  I=INT(I×10+.5)/10
5025  IF C=0 AND ABS(B×I×E) < 0.001 THEN GOTO 5080
5030  X=FN P(I):IF X < 60 OR X > 220 THEN 5080
5050  IF C=0 THEN J=FN H(I):GOTO 5065
5055  IF FN T(I) < 0 THEN 5080
5060  J=FN G(I):N=1
5065  Y=FN Q(J): IF Y < 0 OR Y > 159 THEN 5073
5070  HPLOT X,Y
5073  IF N=1 THEN J=FN F(I):N=0:GOTO 5065
5075  REL=0
5080  NEXT I
5090  RETURN
6000  REM NOUVELLE ÉCHELLE ----------
6010  SC=1:HOME
6020  VTAB 21:INPUT "X INFÉRIEUR";XL$:XL=VAL(XL$)
6030  IF XL > 0 THEN GOTO 6020
6040  VTAB 22:INPUT "X SUPÉRIEUR";XH$:XH=VAL(XH$)
6050  IF XH < 0 THEN GOTO 6040
6060  VTAB 23:INPUT "Y INFÉRIEUR";YL$:YL=VAL(YL$)
6070  IF YL > 0 THEN GOTO 6060
6080  YH=YL+XH-XL:IF YH < 0 THEN GOTO 6060
6100  RETURN
```

Le programme qui précède peut être modifié afin de tracer le graphique de coniques à l'aide de la définition de foyer et de directrice. Autrement dit, une conique sera tracée si l'emplacement du foyer est donné, si une directrice sous la forme Ax + By + C = 0 est fournie et si l'excentricité est également fournie.

Pour obtenir ce programme, remplacez d'abord les lignes 1010 à 1080 par les suivantes.

```
1010 VTAB 21:PRINT "FOYER (X, Y) DROITE AX+BY+C=0  EXCENTRICITÉ E"
1020 VTAB 22:HTAB 1:INPUT "X= ";F$:F=VAL(F$)
1030 VTAB 22:HTAB 7:INPUT "Y= ";V$:V=VAL(V$)
1040 VTAB 22:HTAB 13:INPUT "A= ";A$:A=VAL(A$)
1050 VTAB 22:HTAB 19:INPUT "B= ";B$:B=VAL(B$)
1060 VTAB 22:HTAB 25:INPUT "C= ";C$:C=VAL(C$)
1070 VTAB 22:HTAB 31:INPUT "E= ";E$:E=VAL(E$)
1080 A1 = E^2×A^2-A^2-B^2
```

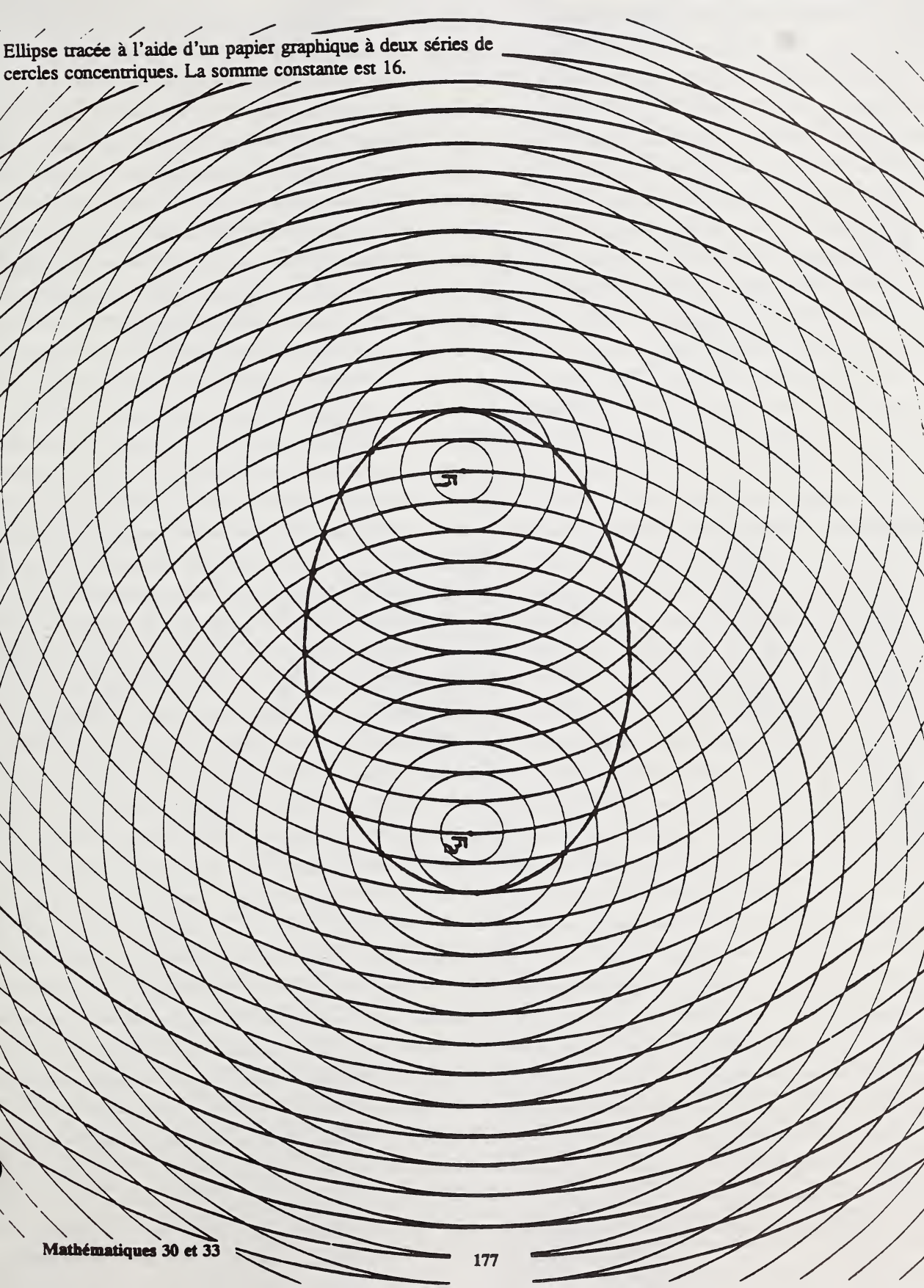
Puis ajoutez les lignes ci-dessous.

```
1090 B1=2×A×B×E^2
1100 C1=E^2×B^2-A^2-B^2
1110 D1=2×A×C×E^2+2×A^2×F+2×B^2×F
1120 E1=2×B×C×E^2+2×A^2×V+2×B^2×V
1130 F1=E^2×C^2-A^2×F^2-A^2×V^2-B^2×F^2-B^2×V^2
1140 A=A1 : B=B1 : C=C1 : D=D1 : E=E1 : F=F1
1150 RETURN
```

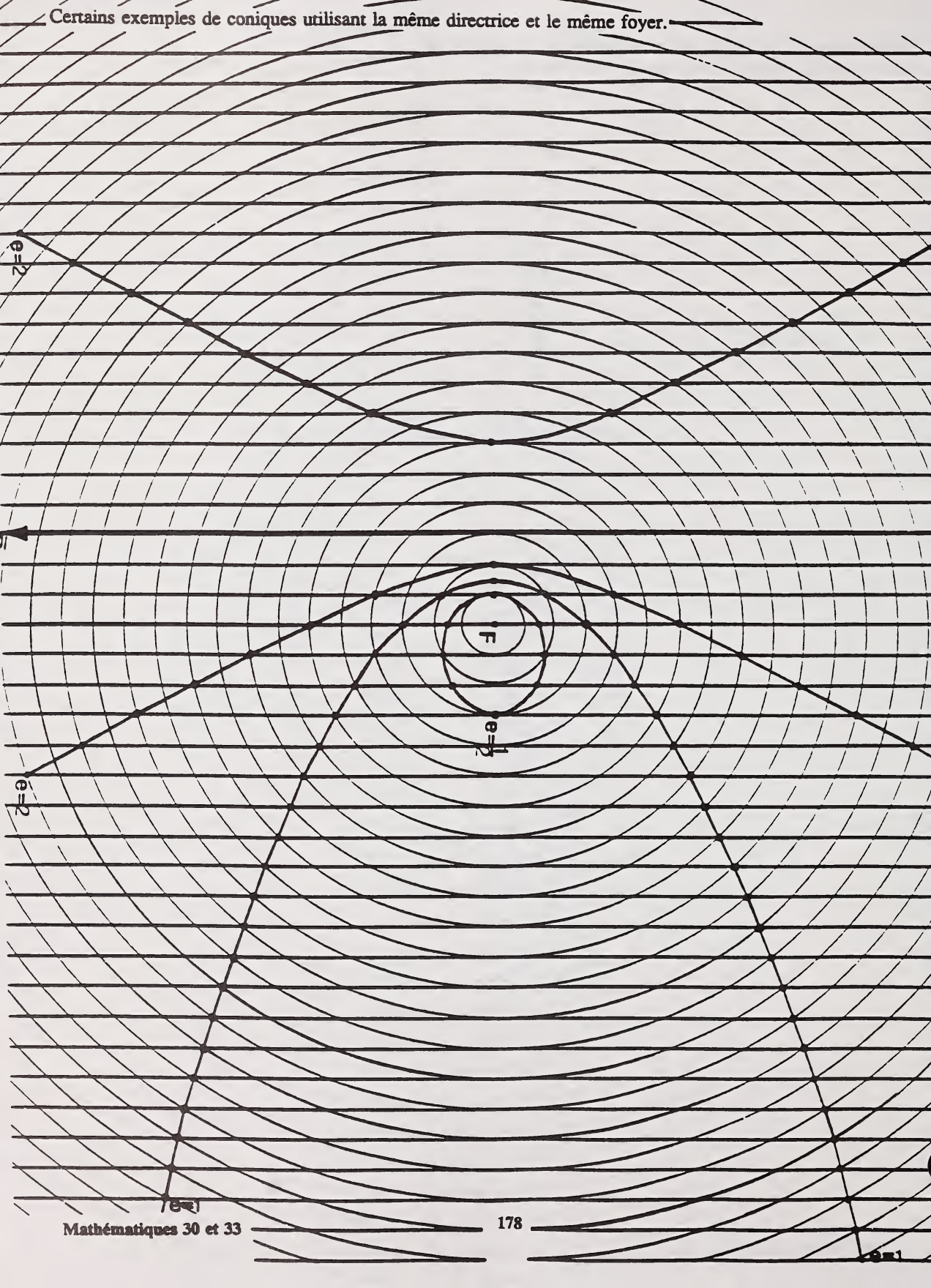
Une fois ces lignes entrées, sauvegardez le programme en entrant SAVE CONIQUE FOYER DIR.

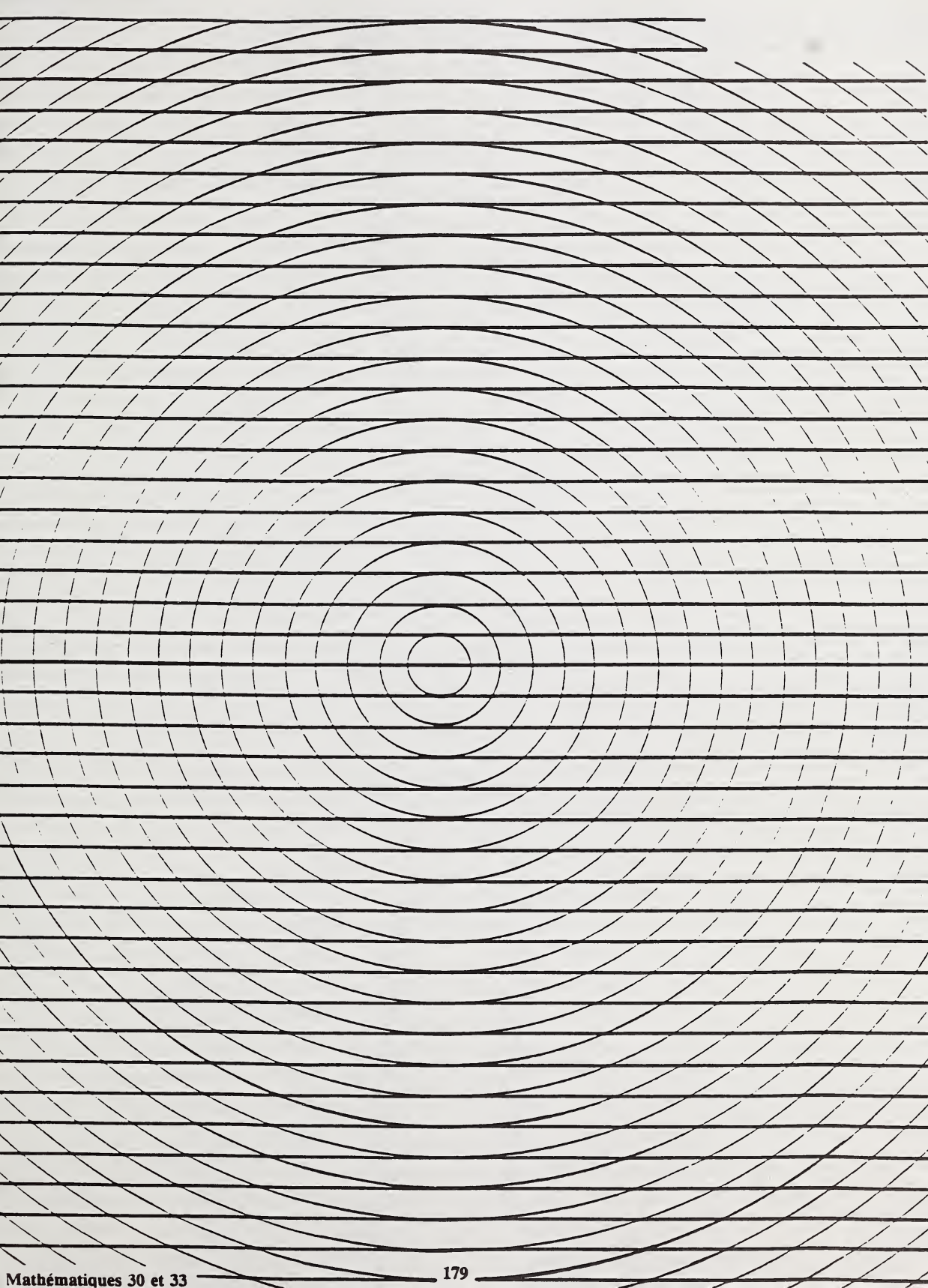
ÉCHANTILLONS DE PAPIER GRAPHIQUE

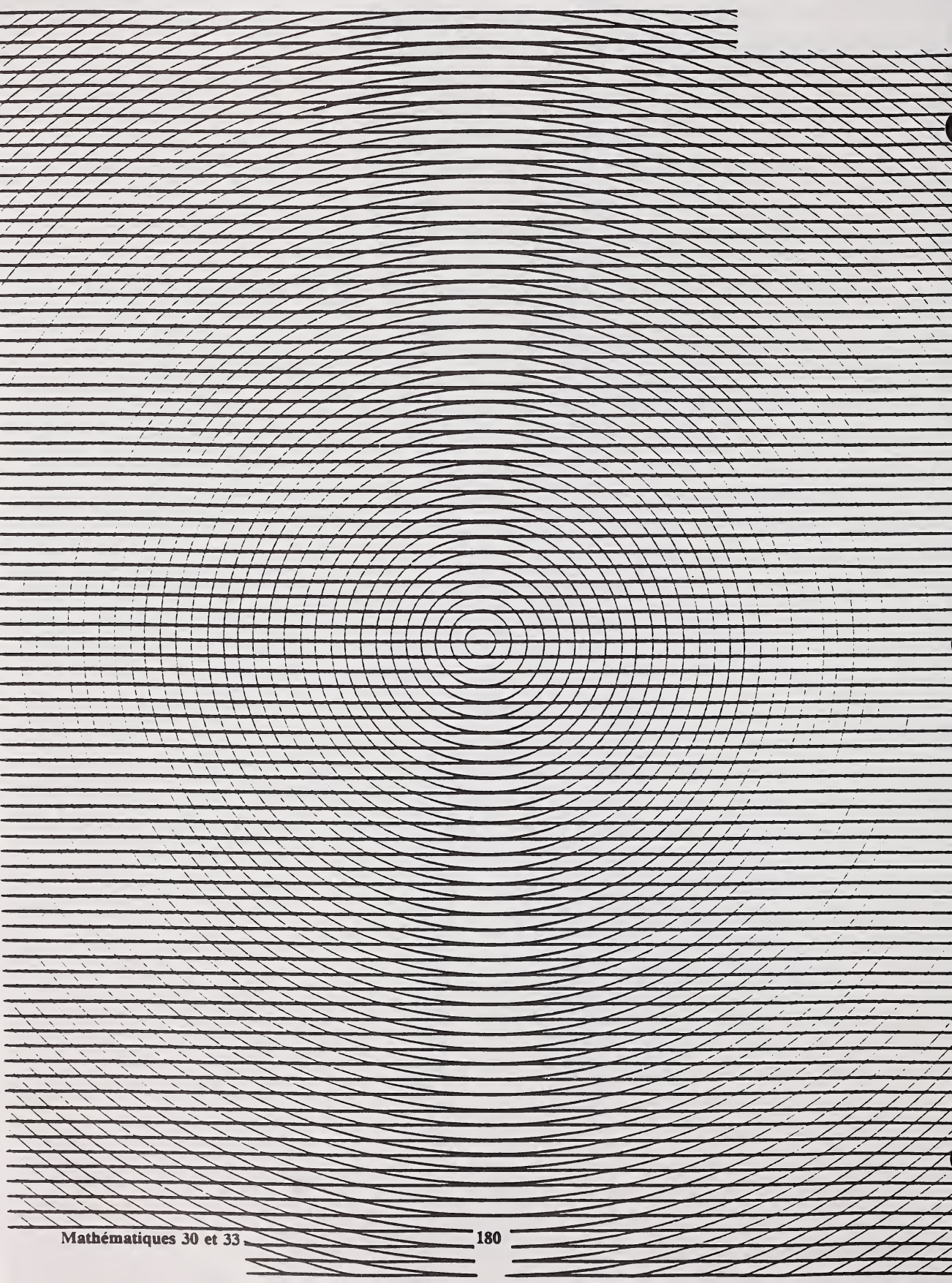
Ellipse tracée à l'aide d'un papier graphique à deux séries de cercles concentriques. La somme constante est 16.

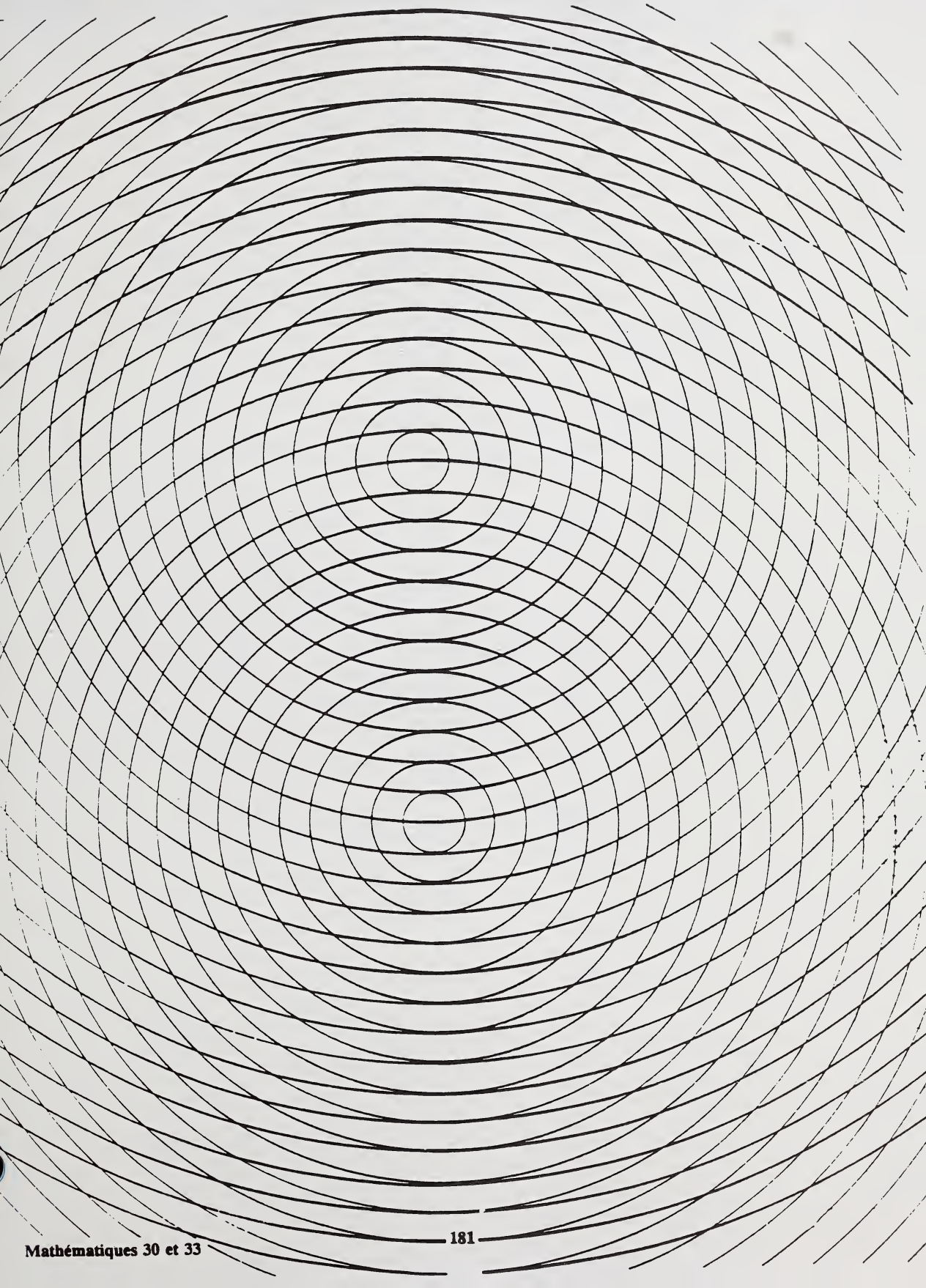


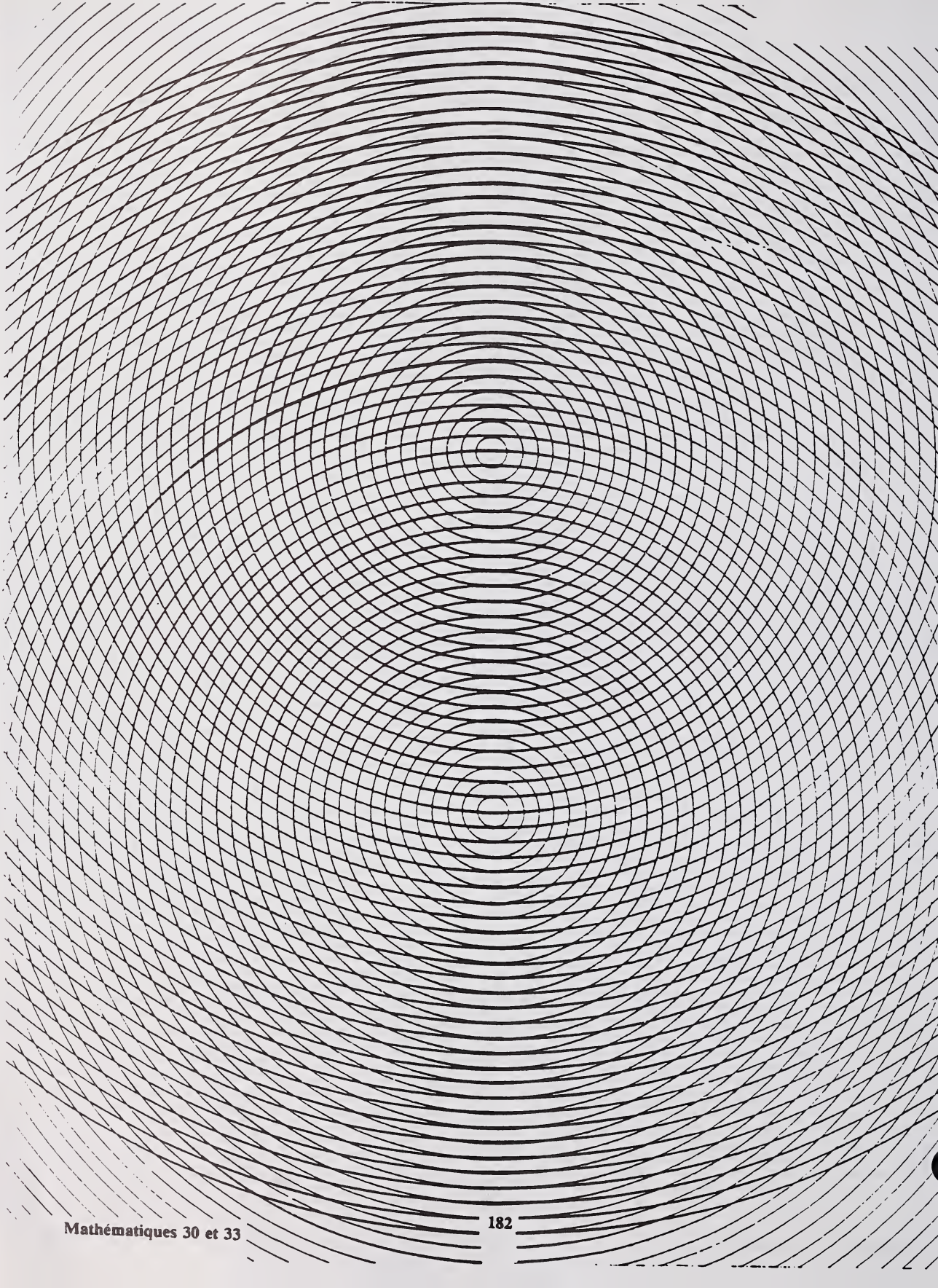
Certains exemples de coniques utilisant la même directrice et le même foyer.











MATHÉMATIQUES 33

DEGRÉ D'IMPORTANCE DES COMPOSANTES DU PROGRAMME

Matière obligatoire

La majeure partie du contenu des cours de mathématiques du niveau secondaire est composée de sujets qui sont obligatoires pour tous les élèves. La **matière obligatoire** représente 80 % du cours et comprend les concepts, les techniques et les attitudes que tous les élèves doivent apprendre et posséder. De plus, la matière obligatoire comprend la maîtrise de certaines méthodes particulières de résolution de problèmes et d'utilisation de la technologie.

Matière facultative

Chaque cours comprend également une partie qui constitue 20 % du contenu total et qui est composée de **matière facultative** compatible avec le contenu et les exigences de la partie obligatoire. La raison d'être de cette matière facultative consiste à permettre d'introduire des notions théoriques ou des activités expérimentales de renforcement, de rattrapage ou d'innovation. Il ne s'agit pas de fournir aux élèves une accélération ni des équivalences de cours. L'approfondissement et le renforcement sont toutefois indiqués et des ouvrages facultatifs répondant aux exigences et aux intérêts des élèves doivent être mis à leur disposition.

Degré d'importance suggéré (en %) pour la matière obligatoire de Mathématiques 33

La répartition suivante ne représente qu'une suggestion visant à aider l'enseignant dans le processus de planification. En effet, un élève peut nécessiter plus ou moins d'efforts qu'un autre pour terminer une unité d'apprentissage.

Unité d'apprentissage	Degré d'importance suggéré (en %)
Radicaux et exposants	5
Rentes, prêts hypothécaires et prêts bancaires	5
Statistiques	15
Trigonométrie	14
Polynômes et expressions rationnelles	8
Fonctions et relations	16
Fonctions et équations quadratiques	17
Matière facultative	20

ATTITUDES

Les élèves devront faire preuve d'une attitude qui dénote une compétence en mathématiques. De façon plus précise, *les élèves devront* :

- avoir confiance en leurs connaissances mathématiques et en leur capacité d'acquérir de nouvelles connaissances;
- faire preuve de persévérance, de détermination, de souplesse et d'ingéniosité dans la résolution de problèmes;
- développer une curiosité intellectuelle et une ouverture d'esprit face aux nouvelles idées et aux changements de l'apprentissage des mathématiques;
- faire preuve de curiosité et de spontanéité et reconnaître la créativité et l'innovation dans la représentation mathématique de situations;
- être critiques et constructifs pour aborder de nouvelles idées et de nouveaux processus;
- connaître l'importance des capacités de communiquer en mathématiques;
- reconnaître l'utilité des aptitudes au calcul, des processus mathématiques et des techniques de résolution de problèmes utilisés dans le cadre des processus décisionnels et de modélisation dans notre société;
- être au courant de l'apport des mathématiques à notre culture et notre civilisation.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Les élèves devront utiliser différentes méthodes leur permettant de comprendre les problèmes mathématiques. De façon plus précise, ils devront :

- lire attentivement le problème;
- identifier et préciser les composantes-clés;
- énoncer de nouveau le problème en utilisant des termes courants;
- évaluer les renseignements fournis afin de déterminer s'ils sont suffisants ou s'ils contiennent des éléments superflus;
- interpréter des illustrations, des diagrammes et des graphiques;
- découvrir les hypothèses cachées, le cas échéant;
- poser des questions pertinentes;
- identifier les renseignements fournis, requis et désirés;
- représenter le problème à l'aide d'un diagramme ou d'un modèle;
- employer la notation adéquate;
- déterminer les inférences valables.

Les élèves devront développer différentes stratégies servant à résoudre des problèmes mathématiques. De façon plus précise, ils devront :

- mener une enquête;
- se servir des techniques d'évaluation et d'approximation;
- développer des équations ou employer des formules;
- utiliser des organigrammes;
- dresser des listes et réaliser des diagrammes;
- rechercher des modèles;
- procéder à rebours;

- subdiviser le problème;
- rechercher un problème plus simple ou associé;
- réaliser des diagrammes ou des modèles;
- se servir du matériel de manipulation;
- choisir et ordonner une suite d'opérations mathématiques;
- tracer le graphique illustrant un problème;
- mettre au point une méthode pour la cueillette et l'organisation des données.

Les élèves devront développer différentes techniques permettant de mettre à exécution le plan de résolution d'un problème. De façon plus précise, ils devront :

- appliquer des stratégies choisies;
- présenter les idées de façon claire;
- noter par écrit le processus de résolution;
- faire preuve des comportements de groupe appropriés;
- se servir de calculatrices et d'ordinateurs;
- évaluer l'efficacité des stratégies de résolution de problèmes;
- rechercher des informations supplémentaires;
- poser des questions;
- demeurer réceptifs à l'inspiration, aux intuitions et aux « idées géniales ».

Les élèves devront employer différentes techniques leur permettant d'examiner la solution d'un problème. De façon plus précise, ils devront :

- déterminer si une réponse est valable;
- expliquer la solution oralement ou par écrit;
- considérer la possibilité de l'existence d'autres solutions;
- rechercher d'autres stratégies et processus de résolution;
- concevoir et résoudre des problèmes similaires;
- remarquer les caractéristiques qu'il sera possible d'identifier dans des problèmes similaires;
- effectuer une généralisation.

RADICAUX ET EXPOSANTS
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 5 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il est possible de simplifier les expressions et les équations radicales en exécutant des opérations de base sur les expressions et les nombres écrits sous forme de radical.	Les élèves devront être en mesure de changer la forme des radicaux du deuxième et du troisième ordre de composé à entier, et vice versa. Les élèves devront être en mesure d'exécuter des additions, soustractions, multiplications et divisions comportant des radicaux du deuxième ordre. Les élèves devront être en mesure de résoudre des équations radicales du deuxième ordre.	Les élèves devront rationaliser des radicaux possédant un monôme comme dénominateur et comprenant une expression du deuxième ordre. Les élèves devront résoudre des problèmes portant sur des équations radicales.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il est possible de simplifier les expressions et les équations radicales en exécutant des opérations de base sur les expressions et les nombres écrits sous forme de radical.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 changer la forme des radicaux du deuxième et du troisième ordre de composé à entier, et vice versa;

1.2 exécuter des additions, soustractions, multiplications et divisions comportant des radicaux du deuxième ordre;

1.2.1 rationaliser des radicaux possédant un monôme comme dénominateur et comprenant une expression du deuxième ordre;

1.3 résoudre des équations radicales du deuxième ordre;

1.3.1 résoudre des problèmes portant sur des équations radicales.

REMARQUES

Avant d'aborder les radicaux, une révision rapide des exposants (Mathématiques 23) peut s'avérer appropriée. Cette révision constitue une bonne occasion d'enseigner l'utilisation de la calculatrice à « nombres fractionnaires » dans la résolution d'un nombre entier à exposant fractionnaire ($16^{\frac{3}{4}}$ par exemple). Bon nombre de ces calculatrices effectuent la conversion des fractions impropres en fractions mixtes et en nombres décimaux. Ce procédé peut servir à introduire la conversion des radicaux entiers en radicaux composés. L'exécution des opérations de cette unité d'apprentissage peut être associée aux opérations sur les autres systèmes de nombres. L'association des opérations sur les radicaux aux opérations enseignées précédemment peut aider les élèves à retenir ces « nouvelles » propriétés.

Note : Il est conseillé de se servir d'équations ne comprenant qu'un seul radical. Si plus d'un radical est utilisé, l'équation quadratique qui en résulte doit être résolue à l'aide de la méthode de factorisation.

Il peut être bon de montrer aux élèves la relation qui existe entre les opérations des unités précédentes et celles de cette unité.

Similitudes entre les radicaux et la matière des autres unités d'apprentissage.

	De radical entier à radical composé	De fractions impropres à puissances fractionnaires mixtes et lois rationnelles des exposants
1.1	$\sqrt{125a^5}$	$\frac{128a^5}{24a^3}$
	$\sqrt{25} \times \sqrt{5} \times \sqrt{a^4} \times \sqrt{a}$	$\frac{8 \times 16 \times (a^3) \times (a^2)}{8 \times 3 \times (a^3)}$
	addition et soustraction des radicaux	termes polynomiaux semblables
1.2	$5\sqrt{3a} - 3\sqrt{2b} + 7\sqrt{3a} - 4\sqrt{2b}$	$5x^2 + 7x - 4x^2 + 12x$
	multiplication et division	règles semblables des polynômes
1.2	$(5\sqrt{2a} + 3\sqrt{b})(3\sqrt{5b} - 2\sqrt{3b})$	P.I.E.D. $(3x + 2y)(5x - 6y)$ suppression des facteurs communs
1.2	$\frac{18\sqrt{14a^6}}{6\sqrt{7a}}$	$\frac{24a^4b^5}{16a^3b^2}$
	résolution d'équations radicales	résolution d'équations quadratiques simples
1.3	$\sqrt{5a + 1} - 16 = 0$	$8x^2 - 10 = 22$

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1.3 : Quelle valeur de x donne $\sqrt{2x} = x\sqrt{2}$?

Solution : Élever au carré les deux membres de l'équation $2x = 2x^2$

soustraire 2x $\quad 0 = 2x^2 - 2x$

factoriser 2x $\quad 0 = 2x(x - 1)$

trouver x $\quad x = 0, x = 1$

vérifier les solutions :

$x = 0\sqrt{2(0)} \mid 0(\sqrt{2}); \; x = 1\sqrt{2(1)} \mid 1(\sqrt{2})$

$0 \mid 0 \; ; \; \sqrt{2} \mid \sqrt{2}$

$\{0\} \; ; \; \{1\}$

solutions $\{0, 1\}$

Problème 1.3 : Trouver x (vérifier les réponses) $3 + \sqrt{3x + 1} = x$

$$\sqrt{3x + 1} = x - 3$$
$$(\sqrt{3x + 1})^2 = (x - 3)^2$$
$$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$$
$$0 = x^2 - 9x + 8$$
$$0 = (x - 1)(x - 8)$$
$$x = 1,\ x = 8$$

avec vérification : x = 1 est une racine étrangère; la solution est {8}.

Problème 1.3.1 : La formule de Héron servant à déterminer l'aire d'un triangle fait appel au demi-périmètre « s » et à la longueur des trois côtés a, b et c : $A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$. Il s'agit de trouver l'aire, sous la forme radicale, d'un triangle dont les côtés mesurent 14 cm, 16 cm et 24 cm.

Solution : $s = \dfrac{14 + 16 + 24}{2}$ $s = 27,\ a = 14,\ b = 16,\ c = 24$

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$
$$A = \sqrt{27(27 - 14)(27 - 16)(27 - 24)}$$
$$A = \sqrt{11\,583}$$
$$A = \sqrt{81 \times 143}$$
$$A = 9\sqrt{143}$$

Problème 1.3.1 : La formule $A = c^2$ est utilisée pour calculer l'aire d'un carré. À l'aide du théorème de Pythagore, trouver la longueur de la diagonale d.

Quelle est la longueur des côtés et des diagonales d'un carré dont l'aire est de 64 unités carrées ?

Solution : $(c = 8,\ d = 8\sqrt{2})$

Problème 1.3.1 : L'aire d'un rectangle est déterminée par $A = a \times b$. En utilisant le théorème de Pythagore, trouver la longueur de la diagonale d.

Si l'aire est de 30 unités carrées et un des côtés mesure $3\sqrt{2}$, quelle est la longueur de l'autre côté et de la diagonale ?

Solution : $(5\sqrt{2},\ d = 10)$

Les problèmes qui suivent comportent une troisième racine et une combinaison de termes radicaux :

Problème 1.3 : (Approfondissement) Trouver x (vérifier les réponses). $3\sqrt[3]{7x - 6} = 4$

Solution : {10}

Problème 1.3 : (Approfondissement) Trouver x (vérifier les réponses). $\sqrt{2x + 5} = 2\sqrt{2x + 1}$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2x + 5})^2 &= (2\sqrt{2x + 1})^2 \\
2x + 5 &= 8x + 4\sqrt{2x + 1} \\
(-6x + 4)^2 &= (4\sqrt{2x})^2 \\
36x^2 - 48x + 16 &= 32x \\
36x^2 - 80x + 16 &= 0 \\
9x^2 - 20x + 4 &= 0
\end{aligned}$$

$$(9x - 2)(x - 2) = 0$$

$$x = \frac{2}{9},\ x = 2$$

vérification : x = 2 est une racine étrangère

solution : $\{ \frac{2}{9} \}$

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

De plus en plus, l'emploi des calculatrices à « nombres fractionnaires », des calculatrices graphiques et des logiciels tableurs se répand dans les cours de mathématiques. Cette unité d'apprentissage se prête à l'utilisation de ces trois outils technologiques, ce qui permettrait de mettre en évidence les différents types d'approches et de techniques d'apprentissage qui sont à notre disposition.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS4, O1, T2 : pages 381 à 405
BMS, 4D : pages 130 à 141
M 064-424 : pages 3 à 28

RENTES, PRÊTS HYPOTHÉCAIRES ET PRÊTS BANCAIRES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 5 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une rente est une suite de versements effectués périodiquement.	Les élèves devront être en mesure de calculer le montant et la valeur actuelle d'une rente à l'aide de tables ou d'une calculatrice.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes simples comprenant le calcul du montant et de la valeur actuelle d'une rente. Les élèves devront être en mesure d'utiliser une calculatrice ou un logiciel tableur pour trouver le montant et la valeur actuelle d'un rente.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que ce sont le montant emprunté, le taux d'intérêt, le nombre de versements et la période totale du remboursement qui déterminent le calendrier de remboursement d'un prêt hypothécaire et des autres types de prêts.	Les élèves devront être en mesure de faire la distinction entre un prêt hypothécaire et les autres types de prêts. Les élèves devront être en mesure de calculer les versements d'un prêt hypothécaire et des autres types de prêts à l'aide de tables.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes portant sur le calcul des versements pour le remboursement d'un prêt hypothécaire et des autres types de prêts. Les élèves devront être en mesure de résoudre des problèmes traitant de prêts hypothécaires et d'autres types de prêts à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'une rente est une suite de versements effectués périodiquement.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 calculer le montant et la valeur actuelle d'une rente à l'aide de tables ou d'une calculatrice;

- 1.1.1 résoudre des problèmes simples comprenant le calcul du montant et de la valeur actuelle d'une rente;
- 1.1.2 utiliser une calculatrice ou un logiciel tableur pour trouver le montant et la valeur actuelle d'un rente.

REMARQUES

L'enseignant doit porter une attention particulière à la formulation du concept. À la différence du cours de Mathématiques 30, l'accent, en Mathématiques 33, est mis sur l'utilisation des tables et non sur le développement de formules. La présentation doit donc être axée sur la discussion du concept de rente par rapport à celui de somme globale ($M = C(1 + i)^n$, étudié en Mathématiques 23) et la différence entre montant et valeur actuelle. Dans les cours de Mathématiques 13, 23 et 33, la priorité est davantage donnée à l'application pratique des concepts plutôt qu'aux notions théoriques sous-jacentes. Ainsi, on favorise ici l'utilisation des tables et la compréhension du problème plutôt que la substitution des valeurs aux variables dans une formule.

Peu de sujets ont la propriété de ne laisser personne indifférent; les questions d'argent se situent certes dans cette catégorie. L'enseignant peut profiter de cette « popularité » pour aborder plusieurs concepts associés aux questions d'argent comme l'emploi de tables, les stratégies de résolution de problèmes, ainsi que le rôle des outils technologiques. On peut concevoir des situations hypothétiques qui, de par leur réalisme, susciteront l'intérêt des élèves (surtout ceux qui occupent un emploi à temps partiel et qui font des économies dans un but précis), puis utiliser ces idées pour orienter les recherches.

Le concept d'intérêt composé, abordé en Mathématiques 23, représente un bon point de départ. Cette révision permettra aux élèves de commencer à comprendre l'origine des nombres qui figurent dans une table.

En règle générale, les élèves éprouvent des difficultés à déterminer, dans une situation donnée, s'il s'agit d'un « montant » ou d'une « valeur actuelle ». Il est fortement recommandé que l'enseignant traite de ce problème. Une façon de procéder consiste à envisager

les situations portant sur un « montant » comme une « épargne » (autrement dit, des dépôts sont effectués afin d'obtenir un certain montant total à la fin d'une période donnée) et les situations portant sur une « valeur actuelle » comme une « dépense » (autrement dit, des retraits sont effectués d'un certain montant total au début d'une période donnée).

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Pour susciter l'intérêt des élèves, commencez cette unité d'apprentissage par un problème suffisamment complexe, afin que la solution ne leur soit pas évidente, et auquel ils peuvent s'identifier. À titre d'exemple, nous vous soumettons le problème suivant :

Problème : Quelle somme désire-t-on recevoir, à la retraite, en plus du montant de la pension ? Une fois le montant annuel déterminé, il s'agit de décider de la période pendant laquelle cette somme doit nous être versée. Combien faut-il épargner à chaque année d'emploi pour atteindre cet objectif ?

Solution : Soit une retraite annuelle de 30 000 $, une période de retraite de 20 ans, un intérêt annuel de 10 % et une période d'emploi de 30 ans. En effectuant un calcul à rebours, on constate que la valeur actuelle de la rente de retraite est d'environ 255 406 $. Le montant annuel requis pour atteindre ce total après une période de 30 ans est d'environ 1 552,68 $.

Une autre façon d'aborder cette unité d'apprentissage consiste à demander aux élèves d'élaborer différentes planifications financières pouvant comprendre une rente, un prêt hypothécaire, un prêt d'un autre type, etc. On peut présenter ce travail sous forme de projet (individuel ou de groupe) pouvant être présenté éventuellement devant la classe. Il y a de nombreux aspects intéressants à considérer. L'étude de la matière de cette unité d'apprentissage apportera aux élèves les connaissances nécessaires à la réalisation de leur travail.

Les problèmes qui suivent permettent d'apprendre à utiliser les tables.

Problème 1.1.1 : Thomas prévoit épargner 1 000 $ à chacune des 25 prochaines années et investir cet argent à un taux d'intérêt de 10 % composé annuellement. Quelle somme aura-t-il accumulée à la fin de cette période ?

Solution : En premier lieu, les élèves doivent être informés que dans la plupart des ouvrages de référence figureront deux tables associées au « montant » et deux tables associées à la « valeur actuelle ». Les élèves doivent également être encouragés à se servir

des tables qui se rapportent aux « rentes ». Dans le cas présent, ils doivent se reporter à la table « Montant d'une rente », car notre épargnant désire accumuler une certaine somme à la fin d'une période de 25 ans. Le nombre qui permettra de calculer la solution se trouve donc à l'intersection de la colonne des 10 % (identifiée au haut de la table) et de la rangée « 25 » (identifiée sur le côté). Ce nombre est 98,347 06 et la solution du problème est 1 000(98,347 06) = 98 347,06 $.

Problème 1.1.1 : Si Thomas prévoit déposer son argent en deux dépôts semestriels de 500 $ chacun durant 25 ans, quel sera le total si l'intérêt de 10 % par année est composé semestriellement ?

Solution : On doit maintenant rappeler aux élèves les compensations à apporter aux calculs (étudiées en Mathématiques 23) lorsque le taux d'intérêt n'est pas calculé annuellement. Le taux d'intérêt (10 % par année) doit être divisé en deux et le nombre de versements doit être doublé. Le nombre recherché se trouve donc à l'intersection de la colonne des « 5 % » et de la rangée « 50 ». Ce nombre est 209,348 000 : en le multipliant par la valeur de chaque dépôt (soit 500 $), on obtient un résultat de 104 674,00 $.

Problème 1.1.1 : L'oncle de Thomas, M. Dudley, a ouvert un compte en fiducie qui doit rapporter à Thomas une somme mensuelle de 1 500 $ pendant quatre ans. Si le taux d'intérêt est de 12 % par année composé mensuellement, quel montant M. Dudley doit-il accumuler pour constituer cette rente, en tenant compte qu'il n'y aura aucune autre contribution ?

Solution : Puisqu'il s'agit d'une situation de « dépense », les élèves doivent se reporter à la table « Valeur actuelle d'un rente ». Encore une fois, une compensation doit être apportée aux calculs en fonction du taux d'intérêt et de la période de calcul de l'intérêt composé. Le nombre recherché se trouve à l'intersection de la colonne des « 1 % » et de la rangée « 48 », soit 37,973 96. La solution est donc 1 500(37,973 96), soit 56 960,94 $. Il est important que les élèves notent que Thomas recevra une somme totale de 72 000 $ pendant les quatre ans.

Le pourquoi de la différence entre la somme totale reçue par Thomas et celle investie par son oncle peut faire l'objet d'une question d'examen ou de test. On peut également demander aux élèves d'appuyer leur réponse à l'aide de calculs justificatifs.

Problème 1.1.1 : Suzanne désire accumuler la somme de 10 000 $ en quatre ans en effectuant des dépôts annuels égaux. Avec un taux d'intérêt de 9 % par année composé semestriellement, quel montant doit-elle déposer chaque fois?

Solution : Ce problème donne l'occasion aux élèves d'explorer d'autres situations en se servant d'une analyse semblable. Étant donné qu'il s'agit d'une situation « d'épargne », on se reporte à la table « Montant d'une rente ». Le nombre recherché, soit 9,380 00 se trouve à l'intersection de la colonne des « 4,5 % » et de la rangée « 8 ». Toutefois, dans ce cas-ci, les élèves doivent s'apercevoir qu'il faut diviser et non multiplier, le montant total étant déjà connu et le problème consistant à déterminer le montant du dépôt. La réponse est 1 066,10 $.

Pour mettre ce concept en application, les élèves doivent être encouragés à élaborer et à tenter de résoudre des problèmes de leur cru, puis à discuter des résultats obtenus. Le développement et la résolution de problèmes créés par les élèves peuvent également être intégrés au processus d'évaluation.

Les ouvrages-ressources offrent aux élèves de nombreuses occasions d'apprendre les fondements de cette matière. Toutefois, l'enseignant doit également présenter des situations qui amèneront les élèves à élargir leur vision. Il faut cependant constamment tenir compte des capacités des élèves et de la philosophie à respecter. À titre d'exemple, examinez le problème qui suit.

Problème 1.1.1 : Jacques désire mettre au point la planification financière qui lui permettra d'effectuer un long voyage en famille. Il cherche à savoir quel montant il doit investir annuellement afin de générer un revenu mensuel de 2 000 $ pendant deux ans. Il compte travailler et épargner pendant 10 ans pour atteindre son but. Il estime que le taux d'intérêt sera de 12 % par année composé annuellement pendant les années d'emploi et composé mensuellement pendant les années de son voyage.

Solution : Un problème de ce type donne l'occasion aux élèves de mettre en pratique leurs techniques de résolution de problèmes. On y retrouve à la fois la valeur actuelle d'une rente et le montant de celle-ci, ainsi que des multiplications et des divisions. Une façon de procéder consiste en premier lieu à calculer la valeur actuelle des 24 paiements de 2 000 $, soit $ 42 486,78. Ce montant constitue le total visé pour la phase d'accumulation. Puis, d'après ce total, le montant de chaque dépôt annuel est établi à 2 421,09 $. Étant donné que ce problème est complexe et qu'il exige des élèves qu'ils connaissent toute la matière de ce concept, il est bon de soumettre d'autres problèmes plus simples. Il s'agit de tenter d'équilibrer le contenu (problèmes complexes et de routine) qui fait appel aux aptitudes des élèves moyens, tout en offrant un défi aux élèves plus doués.

Les situations se rapportant à la retraite (comme celle ci-dessus) s'avèrent généralement très stimulantes pour les élèves, car ils sont souvent surpris du rendement d'un intérêt composé sur une période de 30, 40 ou 50 ans. Un problème se pose toutefois : la plupart des ouvrages-ressources n'offrent pas de tables couvrant des périodes aussi longues. Un autre projet intéressant pour les élèves serait donc l'élaboration de tables étendues, à l'aide d'un logiciel tableur.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Si l'accent est mis ici sur les tables, l'utilisation de la calculatrice sera limitée aux calculs. On peut toutefois se servir d'une calculatrice programmable pour traiter les valeurs provenant d'une table et calculer le total envisagé. La rapidité de ces calculs permet aux élèves de formuler des hypothèses sur différents facteurs variables comme la période du calcul de l'intérêt composé et les taux d'intérêt. La visite d'une institution financière locale représente une bonne idée de projet. Les élèves devront passer en revue les différentes options d'épargne offertes, puis déterminer le rendement obtenu dans divers scénarios. Certains élèves ont peut-être accès à des calculs financiers et à des logiciels spécialisés dont pourraient profiter leurs collègues et qui permettraient d'effectuer des recherches plus approfondies (une sorte de « leçon partagée »).

Dans le cas de recherches comme celles ci-dessus, les logiciels tableurs s'avèrent très utiles. Ces logiciels exigent bien sûr le recours à des formules, mais il est possible de présenter ces formules comme convenant à cette application particulière sans qu'il soit nécessaire d'élaborer davantage. Cela constitue une autre occasion pour les élèves de produire une grande quantité de données dont ils peuvent tirer des conclusions. Les élèves doivent également être encouragés à discuter avec d'autres spécialistes de l'utilisation des logiciels tableurs et d'autres aspects associés à cette matière. Ces spécialistes peuvent, par exemple, être des membres du département d'études commerciales de l'école ou d'autres institutions publiques et privées.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Certains problèmes, celui du nombre de versements ou de dépôts par exemple, exigent l'emploi de formules spécialisées comme celles associées aux suites et séries géométriques. Celles-ci peuvent faire l'objet d'un approfondissement valable. Il faut cependant agir avec prudence lorsque ces formules sont utilisées hors contexte. Elles ne doivent donc être abordées qu'à titre d'approfondissement seulement et une fois que les élèves ont maîtrisé l'utilisation des tables. Les élèves ne doivent retenir aucune de ces formules.

Les élèves ayant acquis des connaissances de base sur l'intérêt composé dans cette unité, ils seront sans doute intéressés par une discussion sur la « règle de 78 » présentée dans le numéro de septembre 1988 du Mathematics Teacher, aux pages 450 à 453.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MM4 : pages 289 à 302 (édition-pilote)

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que ce sont le montant emprunté, le taux d'intérêt, le nombre de versements et la période totale du remboursement qui déterminent le calendrier de remboursement d'un prêt hypothécaire et des autres types de prêts.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 faire la distinction entre un prêt hypothécaire et les autres types de prêts;

2.2 calculer les versements d'un prêt hypothécaire et des autres types de prêts à l'aide de tables;

- 2.2.1 résoudre des problèmes portant sur le calcul des versements pour le remboursement d'un prêt hypothécaire et des autres types de prêts;
- 2.2.2 résoudre des problèmes traitant de prêts hypothécaires et d'autres types de prêts à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

REMARQUES

Comme il a été précisé au concept précédent, peu de sujets suscitent l'intérêt des élèves autant que les questions d'argent. Ceux-ci seront toutefois plus intéressés par la section traitant des « prêts bancaires » que par celle sur les « prêts hypothécaires ». Ce concept fournit également l'occasion de donner une leçon de consommation. Des organismes comme l'Alberta Consumer and Corporate Affairs constituent de bonnes ressources qui peuvent contribuer à compléter les ouvrages de référence et peuvent également fournir du matériel qu'utiliseront les élèves pour leurs projets et leurs recherches.

La différenciation entre les prêts bancaires et les prêts hypothécaires sera de nature plus qualitative que dans les autres concepts. Certaines de ces distinctions ont trait aux frais de montage associés au prêt hypothécaire par rapport à ceux d'un prêt bancaire. Cela provient du fait que le prêt hypothécaire doit être enregistré au bureau du cadastre, ce qui nécessite les services d'un notaire. De plus, les prêts hypothécaires représentent généralement des sommes d'argent plus considérables que les prêts bancaires et comportent donc une période de remboursement plus longue.

Il est important de souligner que l'accent doit être mis sur l'utilisation des tables et non des formules. De plus, comme il s'agit, pour la plupart des élèves, du premier contact avec cette matière, il est conseillé de privilégier l'emploi de problèmes simples. Il est important de se concentrer sur la bonne compréhension des principes de base plutôt que sur une étude de surface de sujets plus complexes.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Encore une fois, les élèves peuvent soumettre des problèmes et des exemples de leur cru. Comme point de départ, on peut, par exemple, utiliser le prêt bancaire d'un petit montant devant servir à acheter un bien de consommation comme une voiture d'occasion ou une motocyclette. Les ouvrages de référence contiennent de nombreux problèmes permettant aux élèves d'acquérir une certaine habileté avec les calculs. Le point fort de cette unité réside dans le fait qu'elle se prête bien à certaines notions connexes que les élèves en mathématiques n'ont pas souvent l'occasion d'aborder.

Activité 2.1 : Organisez une visite à une institution financière locale et demandez à un préposé d'expliquer aux élèves la différence entre un prêt hypothécaire et un prêt personnel pour l'achat d'une voiture ou pour les vacances.

Activité 2.2 : On peut demander aux élèves de réaliser un projet de recherche consistant à compiler les données sur les avantages et les inconvénients de verser un petit ou un gros acompte pour l'achat d'une maison, sur les avantages de rembourser la dette avec de l'argent comptant ou sur la comparaison des différentes options d'achat d'une maison par rapport à la location et à l'investissement. Il s'agit d'une bonne occasion de favoriser l'emploi d'un logiciel tableur.

Les élèves et les enseignants disposent de nombreuses options pour aborder ce concept et en faire l'évaluation. On peut, par exemple, se servir de projets comme ceux présentés au **concept 1** dans lesquels les élèves examinent l'élaboration d'une planification financière à court et à long terme. Il existe sans doute de nombreux spécialistes parmi les parents d'élèves et ailleurs dans la communauté (contrôleurs, comptables, banquiers, membres d'une institution financière par exemple) qui ne demandent pas mieux que de contribuer à l'apprentissage de cette unité.

Il peut également y avoir des occasions pour un enseignement pluridisciplinaire. De jeunes élèves en programmation d'un département d'informatique peuvent peut-être concevoir des programmes produisant des tables d'amortissement ou un grand livre montrant le calendrier des paiements pour le remboursement d'un prêt personnel pendant une période donnée. On peut aussi passer en revue certaines options des cours de comptabilité.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

La majeure partie de l'information de base provenant de tables, la calculatrice ne constitue qu'un outil de calcul. Une calculatrice programmable ou une application de logiciel tableur peut toutefois fournir aux élèves la possibilité d'explorer différentes options d'un problème. Encore une fois, il est important de préciser que l'emploi

des formules ne constitue qu'un approfondissement et ne fait pas partie de la matière de base.

Un logiciel tableur offre l'occasion d'établir plusieurs comparaisons. Il peut, par exemple, fournir les informations permettant de comparer les taux d'intérêt et les modes de remboursement. Les élèves peuvent relever et analyser les ressemblances et les différences perçues, puis formuler leurs commentaires. Une telle analyse peut mener à d'intéressants projets.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Les ressources de base offrent la possibilité d'un enrichissement de la matière. Cet approfondissement peut comprendre la formule associée aux séries géométriques (particulièrement dans certaines applications de logiciel tableur). Encore une fois, il est conseillé de ne présenter ce type d'approfondissement que si les élèves ont démontré qu'ils maîtrisent la matière de base.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MM4 : pages 303 à 305 (édition-pilote de l'Alberta)

STATISTIQUES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 8 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que la distribution bivariée comprend deux variables pouvant être associées l'une à l'autre.	Les élèves devront être en mesure de représenter des ensembles de données bivariées sous la forme d'un nuage de points. Les élèves devront être en mesure de tracer la droite la mieux ajustée sur un nuage de points en appliquant la méthode des médianes. Les élèves devront être en mesure de développer et appliquer des équations de prédiction de la droite la mieux ajustée afin de réaliser des inférences pour diverses populations. Les élèves devront être en mesure de déterminer la corrélation apparente entre les variables d'une distribution bivariée d'après un nuage de points, en incluant la force et le sens de la corrélation. Les élèves devront être en mesure de recueillir, disposer et analyser des séries de données bivariées.	Les élèves devront appliquer des processus statistiques de même qu'un raisonnement statistique lors d'études comportant des données bivariées.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les résultats d'un sondage peuvent être interprétés au moyen d'intervalles de confiance mesurables.	Les élèves devront être en mesure de faire la distinction entre une population et un échantillon, de même qu'évaluer les points forts, les points faibles ainsi que les biais d'échantillons donnés. Les élèves devront être en mesure de recueillir et organiser les résultats obtenus lors de sondages de type OUI-NON réalisés auprès d'échantillons définis. Les élèves devront être en mesure de représenter les résultats d'échantillons multiples à l'aide de diagrammes à boîte et à moustache. Les élèves devront être en mesure de se servir de diagrammes à boîte et à moustache de 90 % pour déterminer l'intervalle de confiance à l'intérieur duquel un sondage peut être interprété. Les élèves devront être en mesure de tirer des conclusions statistiques, de réaliser des inférences par rapport aux populations, d'expliquer dans quelle mesure on peut se fier aux conclusions et inférences effectuées d'après les résultats de sondages de type OUI-NON.	Les élèves devront concevoir et réaliser un sondage simple. Les élèves devront recueillir et organiser les résultats d'un sondage simple. Les élèves devront réaliser des sondages comprenant des échantillons multiples provenant de populations dans lesquelles on retrouve des proportions connues et inconnues de oui. Les élèves devront résoudre des problèmes basés sur les intervalles de confiance de 90 % à l'aide des déductions statistiques. Les élèves devront concevoir et réaliser un sondage à partir d'un échantillon pris au hasard dans une population, recueillir et organiser les réponses, puis analyser les résultats obtenus, effectuer des inférences par rapport à la population et évaluer les résultats en fonction de l'intervalle de confiance obtenu.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que la distribution bivariée comprend deux variables pouvant être associées l'une à l'autre.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 représenter des ensembles de données bivariées sous la forme d'un nuage de points;

1.2 tracer la droite la mieux ajustée sur un nuage de points en appliquant la méthode des médianes;

1.3 développer et appliquer des équations de prédiction de la droite la mieux ajustée afin de réaliser des inférences pour diverses populations;

1.4 déterminer la corrélation apparente entre les variables d'une distribution bivariée d'après un nuage de points, en incluant la force et le sens de la corrélation;

1.5 recueillir, disposer et analyser des séries de données bivariées;

1.5.1 appliquer des processus statistiques de même qu'un raisonnement statistique lors d'études comportant des données bivariées.

REMARQUES

Dans le cadre du programme de Mathématiques 13, les élèves ont travaillé avec des données univariées. On retrouvait ces dernières dans des cas où une variable est mesurée en fonction d'un groupe donné, la taille des élèves d'une classe par exemple. Les techniques et les connaissances associées comprennent une représentation des données à l'aide de tracés rectilignes, de diagrammes en tiges et feuilles, de diagrammes à boîte et à moustache, ainsi que le calcul de diverses moyennes. Ce concept se rapporte à des situations dans lesquelles deux variables sont mesurées en fonction de chacun des membres d'un groupe; on mesure, par exemple, la taille de même que le tour de cou de tous les élèves de la classe. Les données associées à chaque élève peuvent être considérées comme un point sur un plan cartésien. Le graphique ainsi obtenu est appelé un nuage de points. La technique du nuage de points peut s'avérer très utile lorsqu'on cherche à établir la relation entre deux variables. Certaines de ces relations peuvent être établies approximativement à l'aide de la droite la mieux ajustée, auquel cas l'équation de la droite doit alors être déterminée. La droite et l'équation peuvent servir à faire des prédictions. Les limites d'un procédé de ce type doivent être mentionnées, en particulier lorsque les données sont extrapolées.

Il existe différentes façons de tracer une droite la mieux ajustée. La méthode la plus commune est la méthode la mieux ajustée des médianes. Si on utilise la méthode des « moindres carrés », beaucoup de calculatrices peuvent alors déterminer la pente et

l'ordonnée à l'origine de la droite la mieux ajustée. Certains logiciels tableurs effectuent également ces calculs. Il est important de souligner que le calcul n'est pas l'objectif principal de cette unité d'apprentissage. Les élèves doivent être en mesure de déterminer l'équation de cette droite, une fois que la pente et l'ordonnée à l'origine sont connues. Il faut aussi souligner qu'une ligne droite ne convient peut-être pas à tous les types de données. En effet, la relation peut aussi être curviligne. Les données peuvent être rassemblées en deux groupes; dans ce cas, il serait peut-être approprié de tracer une droite distincte pour chacun de ces groupes[1].

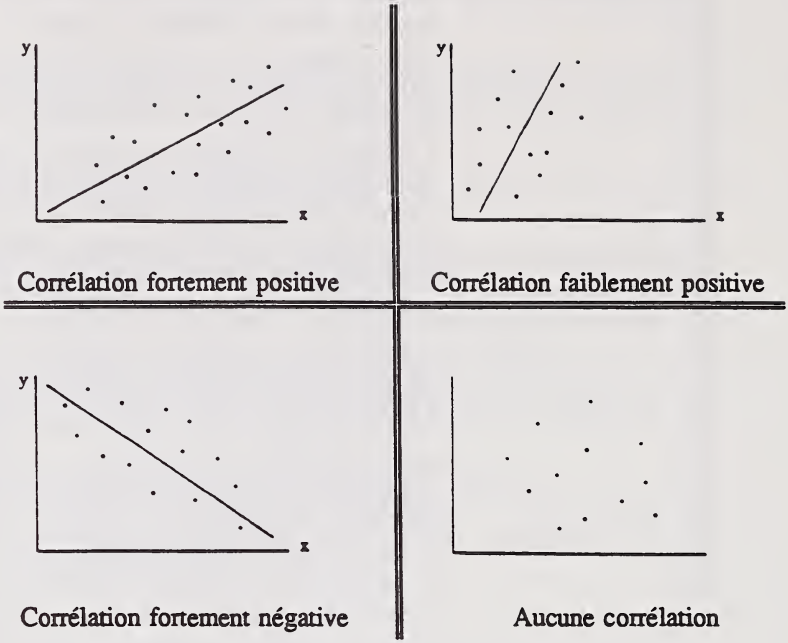
Nous pouvons représenter la force et le sens de la relation entre les variables à l'aide d'un nombre appelé coefficient de corrélation. Si tous les points se situent exactement le long d'une droite dont la pente est positive, le coefficient de corrélation est alors +1. Si les points forment exactement une droite dont la pente est négative, le coefficient de corrélation est -1. Un coefficient zéro signifie qu'il n'existe aucune relation entre les variables. Dans la plupart des cas, la valeur de la corrélation se situera entre -1 et +1. Un coefficient positif indique une relation positive, ce qui signifie que si la valeur d'une des variables augmente, il en va de même pour l'autre. Un coefficient de corrélation négatif indique une relation négative, c'est-à-dire que la valeur de l'une des variables augmente au fur et à mesure que celle de l'autre diminue. On ne doit pas exiger des élèves qu'ils calculent ce coefficient, à moins qu'un logiciel conçu à cet effet permette d'exécuter cette tâche sans peine. Une compréhension claire du rôle de cette valeur est beaucoup plus importante.

La corrélation ne laisse supposer, en aucun cas, qu'il puisse y avoir causalité. De nombreuses raisons peuvent être la cause d'une forte corrélation entre deux variables. On peut, par exemple, voir une corrélation positive entre le temps consacré par un élève aux mathématiques et son attirance pour celles-ci. Toutefois, il serait peut-être absurde de présumer que plus il y a de travaux, plus l'attirance pour la matière est grande. Pour plus de détails à ce sujet, reportez-vous au livre Flaws and Fallacies de Campbell[2].

---

[1] James Landwehr, Exploring Data : Quantitative Literacy Series, page 133.

[2] Stephen Campbell, Flaws and Fallacies in Statistical Thinking, Prentice Hall (1974), page 152.



Les normes du National Council of Teachers of Mathematics[3] font certaines suggestions se rapportant à cette unité d'apprentissage. Les activités des élèves doivent pour une large part consister à poser des questions sur leur environnement. Les exemples choisis devraient comporter des données réelles et non fictives. Les projets doivent faire partie intégrante du processus d'apprentissage et d'évaluation. L'accent ne doit pas être mis sur l'aptitude à calculer une ou des valeurs particulières, mais plutôt sur l'analyse et la communication des nombres et des idées.

Une excellente façon d'aborder ce sujet consiste à demander aux élèves d'identifier des variables qui peuvent faire preuve d'un rapport positif et négatif. Il peut, par exemple, y avoir un rapport positif entre le nombre d'heures d'étude et la note obtenue à un examen ou entre la taille d'un homme et celle de son fils. À l'inverse, le rapport entre le nombre d'heures de travail après l'école et les notes obtenues en classe peut s'avérer négatif. Les élèves doivent examiner ces types de rapports en recueillant des données et en traçant des nuages de points.

[3] National Council of Teachers of Mathematics, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Preston, VA, page 105.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Demandez aux élèves de consulter les almanachs ou les annuaires de statistiques publiés annuellement afin de recueillir des renseignements sur différents pays. La grande quantité de données obtenues peut leur suggérer une théorie sur le rapport (positif ou négatif) qui existe entre deux variables.

Exemples : les précipitations et le produit national brut;
la population et la pollution;
l'aire et la population.

Examiner ce rapport et préparer une présentation. Cela peut également faire l'objet d'un projet de groupe.

Activité 2 : Demandez aux élèves de s'informer auprès du directeur de l'école au sujet des présences en classe à différentes journées, puis de téléphoner au bureau de météorologie pour connaître la température moyenne de chacun de ces jours. Existe-t-il une corrélation entre ces données ? Est-il possible de prédire la présence en classe si on connaît la température ?

Activité 3 : Les sports professionnels regorgent de statistiques. Chaque jour, la section des sports des journaux offre un grand nombre de possibilités d'examen des relations entre des variables. Les annuaires de statistiques contenant les résultats de l'année précédente sont en vente dans les kiosques à journaux.

Exemples : hockey - buts marqués en désavantage numérique (buts pour et contre);
buts marqués (pour et contre);
points au classement et minutes de pénalité;
football - verges en offensive et points marqués;
baseball - points marqués et nombre de coups sûrs.

Activité 4 : Demandez aux élèves de noter de façon précise, depuis le début de l'année scolaire, le nombre d'heures qu'ils mettent à terminer chaque unité. Il s'agit ensuite de déterminer s'il existe une corrélation avec les notes obtenues à ces unités.

Activité 5 : Présentez aux élèves un raisonnement statistique qui prédit leur note finale pour le cours. D'après les résultats obtenus par les élèves des années précédentes aux cours de Mathématiques 20 et Mathématiques 30, par exemple, les élèves actuels peuvent prédire leur note finale pour ce cours. Demandez aux élèves d'analyser ce raisonnement.

Activité 6 : Demandez aux élèves de recueillir des données univariées sur chaque élève de la classe. Il importe d'associer le nom de l'élève à chaque valeur recueillie. Il est conseillé d'utiliser

une grande variété de données.
Exemples :
- la note obtenue à une dictée rédigée par l'expérimentateur;
- le nombre de lancers francs réussis, sur 10, avec un ballon mousse de basket-ball;
- combien chaque élève peut-il nommer de nains (« Blanche-Neige et les sept nains »);
- la précision lorsqu'on demande de deviner le nombre de bonbons dans un bocal;
- le nombre de microsillons, de disques compacts ou de cassettes que possède chaque élève.

Chaque élève doit résumer les résultats de ses recherches à l'aide des techniques associées aux données univariées. On peut ensuite afficher les données et les résumés sur les murs de la classe, puis demander aux élèves d'examiner la possibilité de deux rapports entre ces données :

1. Un rapport qui, selon eux, démontre un coefficient de corrélation très positif ou très négatif (soit près de +1 ou de -1). La note obtenue à la dictée, par exemple, et le nombre de « nains » peuvent dénoter une corrélation élevée.

2. Un rapport qui, d'après eux, possède un coefficient de corrélation très petit (soit près de zéro).

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les calculatrices scientifiques et les logiciels tableurs sont conçus spécialement pour calculer les coefficients de corrélation et les équations de droites les mieux ajustées. Les calculatrices graphiques et certains logiciels tableurs permettent de produire rapidement un nuage de points représentant les données.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5 : pages 446 à 459

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les résultats d'un sondage peuvent être interprétés au moyen d'intervalles de confiance mesurables.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 faire la distinction entre une population et un échantillon, de même qu'évaluer les points forts, les points faibles ainsi que les biais d'échantillons donnés;

2.2 recueillir et organiser les résultats obtenus lors de sondages de type OUI-NON réalisés auprès d'échantillons définis;

2.2.1 concevoir et réaliser un sondage simple;

2.2.2 recueillir et organiser les résultats d'un sondage simple;

2.3 représenter les résultats d'échantillons multiples à l'aide de diagrammes à boîte et à moustache;

2.3.1 réaliser des sondages comprenant des échantillons multiples provenant de populations dans lesquelles on retrouve des proportions connues et inconnues de oui;

2.4 se servir de diagrammes à boîte et à moustache de 90 % pour déterminer l'intervalle de confiance à l'intérieur duquel un sondage peut être interprété;

2.4.1 résoudre des problèmes basés sur les intervalles de confiance de 90 % à l'aide des déductions statistiques;

2.5 tirer des conclusions statistiques, réaliser des inférences par rapport aux populations, expliquer dans quelle mesure on peut se fier aux conclusions et inférences effectuées d'après les résultats de sondages de type OUI-NON;

2.5.1 concevoir et réaliser un sondage à partir d'un échantillon pris au hasard dans une population, recueillir et organiser les réponses, puis analyser les résultats obtenus, effectuer des inférences par rapport à la population et évaluer les résultats en fonction de l'intervalle de confiance obtenu.

REMARQUES

Ce concept comprend la conception et l'interprétation des sondages. Une façon appropriée d'introduire ce concept consiste à présenter aux élèves des exemples de sondages réalisés par les médias d'information. Quoiqu'il existe différents types de sondages, ce concept ne porte que sur ceux du type « OUI-NON ». Les répondants n'ont alors qu'un choix de réponses : « OUI-NON ».

Les questions qui suivent conviennent à un sondage de type « OUI-NON » :

a. Avez-vous obtenu une moyenne de plus de 80 % l'an dernier ?

b. Aimez-vous la musique « rap » ?

Les questions ci-après ne conviennent pas à un sondage de type « OUI-NON » :

a. Quelle a été votre moyenne l'an dernier ?

b. Réagissez à l'énoncé suivant en encerclant une réponse : « J'aime la musique rap ».

Approuve tout à fait	Approuve	Neutre	Désapprouve	Désapprouve tout à fait

Les sondages font partie intégrante des statistiques effectuées par déduction. Le but est de déduire quelque chose, habituellement la moyenne d'un grand groupe (appelé population) en recueillant des informations à partir d'un sous-ensemble de ce groupe que l'on appelle échantillon. Un des problèmes que l'on rencontre est qu'un échantillon choisi au hasard ne représente pas toujours le population de façon exacte (voir l'activité 1).

Un sondage effectué à partir d'un échantillon de 20 pourrait sélectionner huit fumeurs au hasard. Jusqu'à quel point la conclusion de ce sondage qui révèle que 40 % de la population fume est-elle exacte (en effet, 8 sur 20 = 40 %) ? Si les experts affirment que la moyenne est de 40 % ± 10 % dans neuf cas sur dix, une personne qui lirait le sondage aurait alors une meilleure indication des limites de l'information. Cette information « supplémentaire » est appelée intervalle de confiance à 90 % de la moyenne. Cela signifie que si l'on a réalisé le sondage 10 fois, alors neuf fois sur dix la moyenne des gens qui fument dans le sondage se situerait entre 6 et 10 (soit entre 30 % et 50 % si l'échantillon est de 20 personnes). Un des problèmes majeurs qui doit être résolu dans ce concept est la détermination des intervalles de confiance.

La détermination des intervalles de confiance nécessite un retour en arrière. L'accent sera mis sur une population dont on connaît le nombre de « oui ». Dans une pièce où se trouvent huit fumeurs et 12 non-fumeurs, le choix de dix personnes au hasard ne donnera pas toujours la même proportion de fumeurs et de non-fumeurs. Il est toutefois peu probable que certaines proportions des échantillons surviennent.

Une simulation représente une méthode efficace pour introduire la notion d'intervalle de confiance. Une table de nombres choisis au hasard peut être utilisée pour simuler un échantillon de 10 tiré d'une population connue dont 40 % des personnes fument. Si les chiffres 0, 1, 2 et 3 représentent des « oui » et que tous les autres chiffres représentent des non-fumeurs, alors de nombreux échantillons peuvent être établis rapidement à l'aide de la table. De

nombreux manuels donnent aussi des programmes informatiques qui produiront des milliers d'échantillons en quelques minutes.

Voici un exemple de simulation informatisée d'un échantillon de grandeur 10 tiré d'une population dans laquelle on retrouve 40 % de fumeurs. Les résultats de cette simulation vont varier beaucoup chaque fois qu'elle est exécutée, mais les caractéristiques principales sont constantes si on réalise un nombre suffisant d'essais. La colonne des « probable » et « non probable » est analysée ci-dessous.

Pourcentage de la population qui a répondu oui : 40 %
Taille de l'échantillon : 10
Nombre d'échantillons analysés = 1 000

nombre de oui	fréquence	proportion de l'échantillon	probable ou non probable
0	3	0	non probable
1	45	0,10	non probable
2	115	0,20	probable
3	224	0,30	probable
4	240	0,40	probable
5	195	0,50	probable
6	129	0,60	probable
7	35	0,70	non probable
8	13	0,80	non probable
9	1	0,90	non probable
10	0	1,00	non probable

Notes : • Proportion de l'échantillon = $\frac{\text{nombre de oui}}{\text{taille de l'échantillon}}$

• On peut prévoir la fréquence de chaque classe en utilisant la formule de la distribution binomiale, car le sondage de type « OUI-NON » est en fait une expérience binomiale. Les élèves n'emploient pas toujours cette formule, mais elle pourrait s'avérer utile pour l'enseignant lorsque vient le temps de vérifier les simulations.

$$\text{fréquence} = \frac{N \times n!(p^y) \times (1 - p)^{n - y}}{y!(n - y)!}$$

N représentant le nombre d'échantillons utilisés, n la taille de chaque échantillon, y le nombre de « oui »

dans l'échantillon et p le pourcentage de la population qui a répondu par « oui ».

Pour notre simulation, par exemple, N = 1 000, n = 10, p = 0,40 et 7 est une valeur arbitraire de y. Ainsi :

$$\text{fréquence} = \frac{1\,000 \times 10!(0{,}40^7)(0{,}60)^3}{7!3!} = 42{,}26$$

- Il existe des tables de distribution binomiale. La plupart donneront la probabilité d'un certain nombre de « oui » pour chaque taille d'échantillon.

Le programme d'études se concentre sur des intervalles de confiance de 90 %. Pour ce faire, 90 % des valeurs (900 sur 1 000) sont identifiées comme probables. Puis, soit au début ou à la fin, 5 % des valeurs sont notées pour représenter le nombre de réponses non probables. Dans la simulation ci-dessus, 0, 1, 7, 8, 9 et 10 sont identifiés comme des nombres de oui non probables. La fréquence totale de ces valeurs est de « 3 + 45 + 35 + 13 + 1 + 0 » ou 97. Cela représente environ 10 % des simulations effectuées. La fréquence totale des autres valeurs est de 902, ce qui représente environ 90 % des simulations effectuées. Par conséquent, pour une population dont 40 % des gens ont répondu « oui » et dont la taille de l'échantillon est 10, vous devez vous attendre à trouver, pour un échantillon, un nombre de « oui » qui varie entre deux et six, dans 90 % des cas.

Un diagramme à boîte et à moustache peut être utilisé pour résumer cette table. La boîte peut contenir 90 % des valeurs et les moustaches, 5 %. On appelle ce type de diagramme un diagramme à boîte et à moustache de 90 %. Les moustaches ne doivent jamais représenter plus de 5 % des valeurs. Les proportions de l'échantillon pour lesquelles le « oui » est probable sont situées à l'intérieur ou sur les extrémités de la boîte. Dans le cas de cette simulation, les proportions pour lesquelles une réponse affirmative est probable se situent entre 0,2 et 0,6, en utilisant un intervalle de confiance de 90 %.

PROPORTION DU NOMBRE DE OUI
DANS L'ÉCHANTILLON

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0

Tous les manuels contiennent des diagrammes à boîte et à moustache de 90 % pour différentes tailles d'échantillons. Ces

diagrammes, tout comme celui qui précède, sont conçus pour des populations dont le nombre de réponses affirmatives varie entre 0 % et 100 %. La construction d'une de ces tables peut être donnée en guise de projet de classe.

Les élèves ont déjà acquis de l'expérience avec des diagrammes à boîte et à moustache qui utilisent la médiane, donc des tracés en boîte de 50 %. Cela signifie que la boîte comprend 50 % des valeurs et les lignes, 25 %.

Ce diagramme à boîte et à moustache de 90 % sert à établir un intervalle de confiance de 90 % pour les sondages. Si vous réalisez un sondage avec un échantillon dont la taille est de 20, par exemple, vous vous fierez au diagramme établi pour cette taille. Si vous avez noté huit « oui » pour votre échantillon de 20, alors la proportion de votre échantillon est de 40 %. Toutefois, vous désirez connaître le pourcentage de la population qui a répondu par « oui ». Un échantillon dont la proportion des réponses affirmatives est de 40 % surviendra probablement pour de nombreuses variétés de populations. En trouvant 0,4 sur la première rangée du diagramme et en traçant une ligne verticale, il est facile de constater que 0,4 est une proportion d'échantillon pour des populations qui possèdent entre 25 % et 60 % de réponses affirmatives. Par conséquent, les résultats du sondage doivent être donnés de la façon suivante : 40 % ± 15 %, neuf fois sur dix.

Il est important de noter l'effet de l'augmentation de la taille de l'échantillon, de 20 à 40 par exemple. Si on note que 16 personnes sur 40 ont répondu par « oui », la proportion d'échantillon est encore de 0,4. L'utilisation de diagrammes à boîte et à moustache de 90 % indique que 0,4 est une proportion d'échantillon vraisemblable pour des populations qui possèdent entre 30 % et 50 % de réponses affirmatives. Les résultats doivent être donnés de la façon suivante : 40 % ± 10 %, neuf fois sur dix.

Ce concept doit être évalué en grande partie à partir de la conception et de l'évaluation d'un sondage. L'accent doit être mis sur l'environnement des élèves et on devrait prendre le temps de répondre aux questions qui les intéressent. Tous les efforts devraient être déployés afin d'obtenir un échantillon vraiment représentatif et d'être en mesure d'identifier tout biais qui peut modifier les résultats.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : En guise d'introduction aux sondages et à la terminologie qui s'y rapporte, posez une question à toute la classe. La question devrait être du genre « OUI-NON ».

a. Aimez-vous regarder le football américain à la télévision ?
b. Avez-vous étudié pendant plus d'une heure hier soir ?

e. Est-ce que votre famille possède un lecteur de disques compacts ?

Calculez le pourcentage de « oui » pour la classe. Choisissez ensuite cinq élèves au hasard et recueillez leurs réponses pour la même question; calculez la moyenne de l'échantillon de cinq. Comparez la population et la moyenne de l'échantillon. Répétez cette opération avec de nombreux échantillons.

Activité 2 : Demandez aux élèves de choisir des sondages parmi ceux qui sont publiés par les journaux et les revues. Notez ceux qui sont du type « OUI-NON », ainsi que leurs résultats. Portez une attention particulière à l'intervalle de confiance.

Activité 3 : Demandez aux élèves de concevoir ensemble un diagramme à boîte et à moustache de 90 % à partir d'un échantillon de taille 20. Chaque équipe de deux peut utiliser un pourcentage différent de population qui a répondu « oui » en se servant d'un échantillon choisi au hasard. Ces échantillons peuvent être construits à l'aide de diverses techniques, comme une génératrice de nombres choisis au hasard, que l'on retrouve sur certaines calculatrices, ou encore des tables de nombres choisis au hasard, un programme informatique ou même une tige mobile terminée en pointe et pivotant sur un cadran. Un cadran pour une population ayant répondu « oui » dans 40 % des cas peut, par exemple, être constitué d'un cercle divisé en 10 sections dont quatre sont identifiées par « oui » et les six autres par « non ».

Activité 4 : Demandez aux élèves de construire un diagramme à boîte et a moustache de 95 % pour des échantillons de taille 20 et pour une population qui a répondu « oui » dans 40 % des cas. Comparez avec le diagramme à boîte et à moustache de 90 %. On peut également utiliser les simulations faites précédemment. Dans une simulation utilisant 1 000 essais, environ 50 essais sont identifiés comme non probables et les 950 du « centre » sont identifiés comme probables. Pour avoir confiance en la réponse à 95 %, on doit augmenter le champ des valeurs possibles.

Autres activités : Pour obtenir une série d'activités, d'idées et de stratégies d'enseignement, reportez-vous à l'ouvrage Explaining Surveys and Information from Samples[4].

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Comme il a été mentionné précédemment, il existe, dans cette unité d'apprentissage, de nombreuses occasions d'utiliser l'ordinateur, et

[4] James Landwehr et al., Exploring Surveys and Information from Samples, Dale Seymour Publications, Palo Alto, CA, 1987.

même la calculatrice. Certains logiciels tableurs possèdent même une génératrice de nombres au hasard. Ils peuvent être utilisés pour simuler diverses populations.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

TRIGONOMÉTRIE
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 14 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il est possible de tracer des angles sur un plan de coordonnées et de déterminer leurs rapports trigonométriques par rapport aux coordonnées des points situés dans le plan.	Les élèves devront être en mesure d'identifier et de tracer des angles positifs et négatifs dans la position standard sur un plan de coordonnées. Les élèves devront être en mesure de déterminer l'angle de référence d'un angle tracé dans la position standard sur un plan de coordonnées. Les élèves devront être en mesure d'exprimer les rapports trigonométriques de tout angle, θ, dans la position standard sur un plan de coordonnées en fonction de x, y et r, r étant la longueur du côté terminal et (x, y) les coordonnées du point à l'extrémité du côté terminal.	Les élèves devront définir et déterminer les angles principaux et coterminaux dans un plan de coordonnées.
	Les élèves devront être en mesure de déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle. Les élèves devront être en mesure de déterminer deux des valeurs de x, y, r et θ à partir des deux autres.	Les élèves devront utiliser une calculatrice pour déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle.
	Les élèves devront être en mesure d'analyser le graphique de la courbe du sinus à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur.	Les élèves devront étudier l'effet exercé par les paramètres a et b sur une fonction $y = a\sin(bx)$ à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les méthodes employées lors de la résolution des triangles rectangles peuvent aussi servir à l'élaboration de lois servant à la résolution des triangles obliques.	Les élèves devront être en mesure de déterminer les mesures des côtés et des angles de diagrammes comprenant plusieurs triangles rectangles à deux ou trois dimensions.	Les élèves devront résoudre des problèmes portant sur plusieurs triangles rectangles à deux ou trois dimensions.
	Les élèves devront être en mesure de déterminer les mesures des côtés et des angles inconnus dans des triangles obliques en appliquant la loi du sinus.	Les élèves devront illustrer la loi du sinus à l'aide d'exemples. Les élèves devront résoudre des problèmes en appliquant la loi du sinus. Les élèves devront illustrer le cas ambigu de la loi du sinus.
	Les élèves devront déterminer les mesures des côtés et des angles inconnus de triangles obliques en appliquant la loi du cosinus.	Les élèves devront illustrer la loi du cosinus à l'aide d'exemples. Les élèves devront résoudre des problèmes en appliquant la loi du cosinus. Les élèves devront reconnaître que la loi du cosinus est une généralisation du théorème de Pythagore.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il est possible de tracer des angles sur un plan de coordonnées et de déterminer leurs rapports trigonométriques par rapport aux coordonnées des points situés dans le plan.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 identifier et tracer des angles positifs et négatifs dans la position standard sur un plan de coordonnées;

1.1.1 définir et déterminer les angles principaux et coterminaux dans un plan de coordonnées;

1.2 déterminer l'angle de référence d'un angle tracé dans la position standard sur un plan de coordonnées.

REMARQUES

En Mathématiques 23, les élèves ont vu l'application des trois rapports trigonométriques primaires en rapport avec la résolution de problèmes portant sur des triangles rectangles. L'objectif, en Mathématiques 33, est d'étendre l'étude de la trigonométrie aux triangles obliques.

Les élèves de Mathématiques 33 ont habituellement de la difficulté à comprendre les concepts abstraits. Par conséquent, nous recommandons une approche inductive avant d'entreprendre l'étude de ces concepts. Même pour des élèves forts en mathématiques, le rapport de la trigonométrie avec le système de coordonnées est difficile à établir.

Insistez sur le fait que les angles de référence sont des angles aigus positifs formés par le côté terminal d'un angle et l'axe des x. À l'époque de l'utilisation des tables trigonométriques et avant l'avènement de la technologie moderne, les angles de référence servaient à déterminer les rapports trigonométriques des angles.

Note : L'étude se limite aux rapports trigonométriques primaires, afin que les élèves puissent bien saisir les rôles du sinus, du cosinus et de la tangente. Étant donné que les élèves déterminent les rapports trigonométriques à l'aide d'une calculatrice, l'introduction des rapports réciproques est superflue. Les fonctions inverses du sinus, du cosinus et de la tangente seront présentées en Mathématiques 30.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Demandez aux élèves de compléter le tableau suivant, afin qu'ils puissent constater que les fonctions trigonométriques existent également pour des angles autres que les angles aigus d'un triangle rectangle. Les élèves doivent déterminer ces rapports à

l'aide de leur calculatrice. Rappelez-leur aussi de placer leurs calculatrices en mode degré.

Angle A	sin (A)	cos (A)	tg (A)
30°			
150°			
210°			
330°			
390°			
410°			
570°			
690°			
-30°			
-150°			
-330°			
90°			
180°			
270°			
360°			
1 000°			
-1 000°			
etc.			

Faites en sorte que les élèves choisissent eux-mêmes certains angles. Cherchez des façons de

a. tracer des angles de ce type;
b. définir des rapports trigonométriques pour ces angles;
c. déterminer pourquoi certains angles ont les mêmes rapports trigonométriques.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Vidéo :
Trigonometric Functions 1 (TV Ontario) : N°1, Trigonometric Ratios (révision); N°2, Solving Right Triangles (révision); N°3, Angles on the Plane.

Ces vidéos sont plus utiles dans un contexte de révision que comme introduction à de nouveaux sujets, car ils se déroulent trop rapidement et les élèves sont incapables de tout assimiler lors d'une première présentation.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

CONCEPT 1 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il est possible de tracer des angles sur un plan de coordonnées et de déterminer leurs rapports trigonométriques par rapport aux coordonnées des points situés dans le plan.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.3 exprimer les rapports trigonométriques de tout angle, θ, dans la position standard sur un plan de coordonnées en fonction de x, y et r, r étant la longueur du côté terminal et (x, y) les coordonnées du point à l'extrémité du côté terminal;

1.4 déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle;

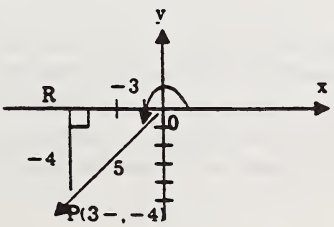
1.4.1 utiliser une calculatrice pour déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle;

1.5 déterminer deux des valeurs de x, y, r et θ à partir des deux autres.

REMARQUES

Les élèves de Mathématiques 23 n'ont aucune expérience de l'application de la trigonométrie dans un système de coordonnées. Il est recommandé de revoir les définitions du sinus, du cosinus et de la tangente des angles aigus des triangles rectangles. À partir de ces définitions, il est possible d'élaborer des définitions de fonctions trigonométriques des angles situés dans un plan de coordonnées, comme cela a été fait en MM4 et MMW4. Il faut souligner l'utilisation des triangles de référence en MM4, plutôt que l'emploi unique des définitions des fonctions trigonométriques des angles situés dans un plan de coordonnées. L'utilisation d'un triangle de référence aide à établir le lien entre les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle et ceux de tout angle situé dans le système de coordonnées. Le point P(-3, -4), par exemple, est situé sur le côté terminal d'un angle tracé dans la position standard. Tracez l'angle et formez un triangle de référence à l'aide d'un segment de droite vertical unissant le point (-3, -4) à l'axe des x.

Le triangle de référence est $\triangle POR$. Soit $\angle POR$ l'angle de référence servant à déterminer les rapports trigonométriques pour θ.



$r^2 = x^2 + y^2$
$r^2 = (-3)^2 + (-4)^2$
$r^2 = 9 + 16$
$r^2 = 25$
$r = 5, r > 0$

Les côtés du triangle de référence doivent être identifiés par -3, -4, l'hypoténuse, calculée à l'aide du théorème de Pythagore, étant 5. En utilisant l'angle de référence du triangle, il est possible de déterminer les rapports trigonométriques d'après les côtés de ce triangle de référence.

sin (θ) = -4/5		[côté opposé/hypoténuse]
cos (θ) = -3/5		[côté adjacent/hypoténuse]
tg (θ) = -4/-3	ou	4/3 [côté opposé/côté adjacent]

Il est important de donner aux élèves l'occasion d'effectuer leurs propres généralisations, à savoir si le sinus d'un angle est positif ou négatif. Il faut souligner l'importance du signe (positif ou négatif) du rapport trigonométrique de l'angle, en particulier lorsque les élèves vérifient la vraisemblance du résultat obtenu à l'aide d'une calculatrice. Par conséquent, la mémorisation de la règle « CAST » importe peu; par contre, la compréhension des rapports à l'intérieur de cette règle est IMPORTANTE.

Note : Cette approche qui associe la trigonométrie à une fonction circulaire est importante pour les élèves qui sont transférés au cours de Mathématiques 30.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Demandez aux élèves de tracer plusieurs angles dans la position standard sur un plan de coordonnées, puis de déterminer les rapports trigonométriques. Une fois ceci terminé, demandez-leur d'étudier les rapports trigonométriques déterminés, afin d'établir une relation entre le quadrant dans lequel est situé le côté terminal de l'angle et le signe du rapport trigonométrique. Ceci peut inciter les élèves à examiner la nature « circulaire » de la trigonométrie. Ceux-ci vont probablement constater que les rapports trigonométriques des angles dans la position standard sont identiques mais que les signes diffèrent, ou encore que le sinus d'un angle est identique au cosinus d'un autre angle. L'étude de ces relations aidera les élèves à déterminer si le résultat obtenu à l'aide d'une calculatrice est acceptable ou non.

Activité 2 : Demandez aux élèves de déterminer deux des valeurs de x, y, r et θ à partir des deux autres, à l'aide d'un tableau semblable à celui donné ci-dessous.

Soulignez le fait que lors du calcul de θ à partir de r et de x ou y, il est possible d'obtenir deux réponses, mais que la calculatrice n'en donnera qu'une seule. Pour calculer la valeur de θ, utiliser l'angle de référence du triangle de référence, puis calculer les valeurs correspondantes de θ mesurées depuis l'axe des x positif.

x	y	r	θ
3	4		
-3	4		
		5	Note : il y a 2 réponses
		2	45°
		1	-150°

Problème : Expliquez pourquoi les affirmations suivantes sont vraies.
$-1 \leq \sin \theta \leq 1$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

(Nous tenons à remercier M. Ray, du J.A. Williams High School).

Demandez aux élèves de suggérer diverses méthodes pour la résolution de ce problème.

1. À l'aide d'une calculatrice graphique.
2. Par le calcul des valeurs de θ d'après la fonction trigonométrique.
3. À l'aide des définitions des fonctions trigonométriques, et du fait que r est toujours plus grand que x ou y.

Note : On peut aussi discuter de ce problème lorsqu'on étudie les graphiques des fonctions du sinus et du cosinus.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Note : Les calculatrices doivent être en mode degré.

Reportez-vous à MM4, pages 460 et 461, Trigonometry on a Spreadsheet.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

1. Présentez les coordonnées polaires (r, θ) comme une autre façon de décrire des angles situés dans un plan de coordonnées et le point (x, y) situé sur le côté terminal de θ.

2. Les fonctions trigonométriques définies dans le cercle unitaire peuvent être étudiées.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

CONCEPT 1 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent qu'il est possible de tracer des angles sur un plan de coordonnées et de déterminer leurs rapports trigonométriques par rapport aux coordonnées des points situés dans le plan.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.6 analyser le graphique de la courbe du sinus à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur;

1.6.1 étudier l'effet exercé par les paramètres a et b sur une fonction $y = a\sin(bx)$ à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur.

REMARQUES

Étant donné que les élèves de Mathématiques 23 ont peu d'expérience du traçage des graphiques de fonctions linéaires, l'étude des graphiques de la courbe du sinus devrait se faire après l'étude de l'unité d'apprentissage « Fonctions et Relations ». L'étude des graphiques de $y = \sin x$ et $y = a\sin(bx)$ est l'approfondissement des concepts étudiés dans cette unité. À l'aide d'ordinateurs ou de calculatrices graphiques, étudiez les graphiques pour trouver les modèles qui se répètent, leur domaine et leur intervalle, ainsi que leurs coordonnées à l'origine.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Note : Les intervalles de la calculatrice pour l'axe des x et l'axe des y devraient être ajustés en fonction d'au moins un cycle et du graphique du sinus. Bien que leur mode normal soit le radian, il vaut peut-être mieux passer en mode degré, puisque les élèves de Mathématiques 33 n'ont pas étudié les radians.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

1. Les graphiques de $y = \cos x$ et $y = a\cos(bx)$ peuvent être déterminés et comparés à ceux de la courbe du sinus. Discutez de l'amplitude et de la période des graphiques du sinus et du cosinus. Étant donné que les transformations des fonctions seront étudiées dans l'unité « Fonctions et Relations », la translation horizontale ou verticale, ou les deux, de ces graphiques trigonométriques peut aussi se faire à l'aide d'ordinateurs ou de calculatrices graphiques.

   Reportez-vous à MM4, page 207, ou à MMW4, pages 196 à 205.

2. Étudiez le graphique de $y = \text{tg } x$.

3. Il est possible de résoudre le problème suivant à l'aide d'une calculatrice graphique plutôt qu'en utilisant une méthode algébrique.

Demandez aux élèves d'entrer $y = x^2 + 1$ et $y = \cos x$. Leur point d'intersection donne la valeur de x qui satisfait l'équation.

Problème : Calculez toutes les valeurs de x qui satisfont l'équation suivante : $x^2 - \cos x + 1 = 0$.

Réponse : $x = 0$.

$$\begin{aligned} & x^2 - \cos x + 1 = 0 \\ & x^2 + 1 = \cos x \\ \text{Mais} \quad & -1 \leq \cos x \leq 1 \\ \therefore \quad & -1 \leq x^2 + 1 \leq 1 \\ & -2 \leq x^2 \leq 0 \end{aligned}$$

En ne tenant compte que des solutions réelles, nous avons $x = 0$.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les méthodes employées lors de la résolution des triangles rectangles peuvent aussi servir à l'élaboration de lois servant à la résolution des triangles obliques.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 déterminer les mesures des côtés et des angles de diagrammes comprenant beaucoup de triangles rectangles à deux ou trois dimensions;

2.1.1 résoudre des problèmes portant sur beaucoup de triangles rectangles à deux ou trois dimensions.

REMARQUES

La résolution de triangles rectangles à deux ou trois dimensions constitue un approfondissement du programme de Mathématiques 23, dans lequel les élèves sont appelés à résoudre des triangles rectangles à deux dimensions. Il est bon de revoir les définitions de l'angle d'élévation et de l'angle de dépression avant de passer à la résolution de problèmes. Dans le but de faire comprendre aux élèves la nécessité des mesures indirectes et l'application de la trigonométrie pour résoudre ces problèmes, demandez-leur d'effectuer l'activité proposée ci-dessous.

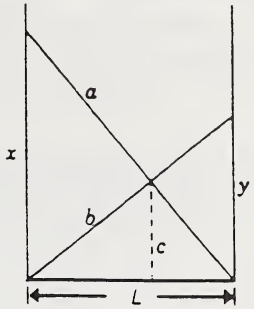
PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Demandez aux élèves d'imaginer une méthode pour mesurer la hauteur d'un lampadaire situé de l'autre côté de la rue en face de l'école, sans avoir à traverser cette rue. Ils peuvent utiliser un ruban à mesurer ainsi qu'un instrument servant à mesurer les angles d'élévation. Demandez-leur de mesurer l'angle d'élévation de ce lampadaire depuis un point situé à l'extérieur de l'école, puis de se rapprocher d'environ 1 mètre, et enfin, de mesurer l'angle d'élévation depuis ce nouveau point. À partir de ces données, ils devraient, en classe, être en mesure de déterminer la hauteur approximative de ce lampadaire. Incitez les élèves à expérimenter diverses méthodes pour résoudre ce problème, à l'aide d'un diagramme à l'échelle suivi d'une approche algébrique par exemple.

Problème : Les élèves de Mathématiques 33 peuvent résoudre ce problème sans appliquer de méthode algébrique. Cette approche peut sembler trop difficile, mais incitez toutefois les élèves à imaginer des façons de résoudre ce problème. Ils peuvent tracer un diagramme à l'échelle, construire un modèle à l'échelle, ou encore utiliser du papier quadrillé pour tracer le diagramme. L'approche algébrique peut constituer une activité supplémentaire.

Problème 2.1 : Deux échelles se croisent dans une ruelle étroite. Ces échelles mesurent a = 9 m et b = 6 m. La ruelle mesure

L = 4 m de largeur. Calculez la hauteur, c, du point d'intersection de ces deux échelles.



Réponse : c = 2,87 m

Une des solutions :
À l'aide de la trigonométrie :

$\cos \theta = L/b = 4/6$
$\therefore \theta = 48{,}2°$
$\cos \theta = L/a = 4/9$
$\therefore \theta = 63{,}6°$

À l'aide de la trigonométrie ou du théorème de Pythagore :

$y = 4{,}47$ m
$x = 8{,}05$ m

Par la résolution de triangles semblables :

$c/4{,}47 = r/4$
$\therefore 4c = 4{,}47r$

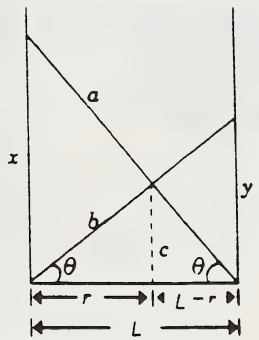
et

$c/8{,}06 = (4 - r)/4$
$\therefore 4c = 8{,}06(4 - r)$
$= 32{,}24 - 8{,}06r$
$\therefore 4{,}47r = 32{,}24 - 8{,}06r$

et $r = 2{,}57$

En effectuant la substitution,

$4c = 4{,}47(2{,}57)$
et $c = 2{,}87$ m.



CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 405 à 424
BMS, 5A : pages 183 à 186
INF, M534 : pages 207 à 212

CONCEPT 2 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les méthodes employées lors de la résolution des triangles rectangles peuvent aussi servir à l'élaboration de lois servant à la résolution des triangles obliques.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.2 déterminer les mesures des côtés et des angles inconnus dans des triangles obliques en appliquant la loi du cosinus;
- 2.2.1 illustrer la loi du sinus à l'aide d'exemples;
- 2.2.2 résoudre des problèmes en appliquant la loi du sinus;
- 2.2.3 illustrer le cas ambigu de la loi du sinus.

REMARQUES

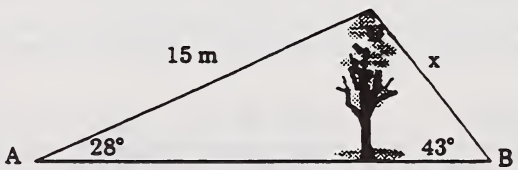
Il est important, lors de la présentation de la loi du sinus, que les élèves voient qu'elle se développe à partir d'une comparaison des triangles. Ils n'ont toutefois pas à en mémoriser le développement ou la « preuve ».

Une illustration du cas ambigu suffit. Illustrez ceci à l'aide des exemples ci-dessous. La résolution des deux triangles n'est pas nécessaire.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1 : Ce problème peut servir à présenter le développement de la loi du sinus à partir d'une comparaison des triangles.

Depuis un point A, l'angle d'élévation de la cime d'un arbre est de 28°. Depuis un point B, de l'autre côté de cet arbre, l'angle d'élévation de la cime est de 43°. Deux câbles partent du sommet de l'arbre et sont reliés aux points A et B au sol. Si le câble relié au point A mesure 15 m, quelle est la longueur du câble relié au point B ?



Solution : Soient h la hauteur de l'arbre et x la longueur du câble relié au point B.

Alors, sin (28°) = h/15 et sin (43°) = h/x.
Donc, h = 15 sin (28°) et h = x sin (43°).

Par conséquent, 15 sin (28°) = x sin (43°).
À ce stade, ils peuvent trouver x sans avoir à déterminer h.
La loi du sinus peut aussi être démontrée.

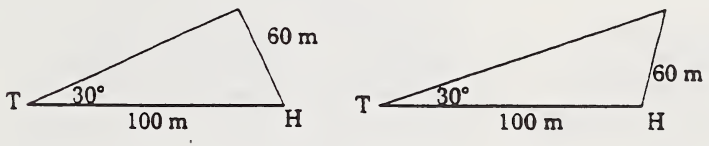
$$15/\sin(43°) = x/\sin(28°)$$

Réponse : L'autre câble mesure 10,3 m de long.

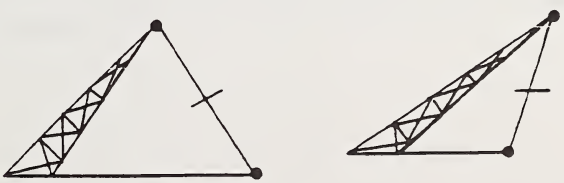
Activité 1 : Pour vérifier que les rapports établis dans la loi du sinus sont égaux, il s'agit de décrire un triangle en donnant une seule mesure pour les trois côtés et les trois angles. Dites aux élèves de déterminer la valeur de a/sin A, b/sin B et c/sin C, à deux décimales près. Sont-elles égales ? L'un des triangles peut être comme suit : triangle ABC dans lequel $\angle A = 15°$, $\angle B = 30°$ et $\angle C = 135°$, a = 7,32, b = 14,14 et c = 20.

Activité 2 : Pour illustrer le cas ambigu, demandez aux élèves d'utiliser un rapporteur et une règle ou un compas pour tracer des triangles qui reproduisent ce cas. Tracez par exemple un triangle dans lequel $\angle A = 40°$, le côté c = 6 cm et le côté a = 4 cm.

Problème 2 : Le sixième trou d'un parcours de golf se trouve à 100 mètres d'un arbre. Un joueur frappe la balle à un angle de 30° de la ligne directe par rapport à ce trou. La balle atterrit à 60 mètres du trou. Tracer des diagrammes pour illustrer les deux situations possibles. La balle peut toucher le sol un peu avant le trou ou passé celui-ci.



Problème 3 : Pour illustrer le cas ambigu, une grue doit placer une poutre d'acier sur un édifice. Démontrer les deux façons de placer cette poutre d'acier sur l'édifice. Se reporter au diagramme.



Problème 4 : Dans un triangle rectangle 5-12-13, quelle est la longueur de la bissectrice du plus grand angle aigu ?

Réponse : $5\sqrt{13}/3 = 6{,}01$

Tiré de National Council of Teachers of Mathematics, Mathematics Teachers, mars 1988.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Reportez-vous à MMW4, page 160, « Solving Triangles with a Computer »
Reportez-vous à M11, pages 427 à 429, « Computer Power »
Reportez-vous à HM11, page 314, « Computer Application - Law of Sines »

Vidéo :
Trigonometric Functions I (TV Ontario) : No. 4, The Sine Law; No. 6, Applications of the Sine Law and the Cosine Law.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Résoudre des cas ambigus.

Problème : Demandez aux élèves de se reporter au problème 2 et de calculer la distance parcourue par la balle dans les deux cas. Ceci peut être effectué à l'aide d'un diagramme à l'échelle, ou selon une approche algébrique. Ces distances sont de 53,4 mètres et de 119,8 mètres.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 424 à 432
BMS, 5A : pages 198 à 200
INF, M534 : pages 213 à 221

CONCEPT 2 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les méthodes employées lors de la résolution des triangles rectangles peuvent aussi servir à l'élaboration de lois servant à la résolution des triangles obliques.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.3 déterminer les mesures des côtés et des angles inconnus de triangles obliques en appliquant la loi du cosinus;
- 2.3.1 illustrer la loi du cosinus à l'aide d'exemples;
- 2.3.2 résoudre des problèmes en appliquant la loi du cosinus;
- 2.3.3 reconnaître que la loi du cosinus est une généralisation du théorème de Pythagore.

REMARQUES

Comme dans le cas de la loi du sinus, on n'a pas besoin de prouver la loi du cosinus. On peut appliquer la seconde formule de la loi du cosinus pour trouver un angle dans d'un triangle, c'est-à-dire,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

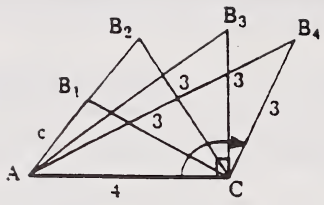
Lors de la recherche de l'angle le plus grand d'un triangle oblique, la loi du cosinus déterminera l'angle obtus, s'il en existe un, alors que la loi du sinus déterminera l'angle aigu. Soulignez ce fait aux élèves.

Les formules doivent être mémorisées.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Pour vérifier la véracité de la loi du cosinus, demandez aux élèves de comparer a^2 à la valeur de $b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$, et ainsi de suite, en fonction du triangle dans lequel $\angle A = 15$, $\angle B = 30$, $\angle C = 135$, les côtés $a = 7{,}32$, $b = 14{,}14$ et $c = 20$. Vérifiez aussi la seconde formule de la loi du cosinus à l'aide de ce triangle.

Activité 2 : Pour comparer la loi du cosinus au théorème de Pythagore, demandez aux élèves de compléter le tableau suivant. Soit un triangle ABC dont les côtés a et b demeurent inchangés et un angle C qui, d'angle aigu devient un angle droit, pour ensuite devenir un angle obtus.



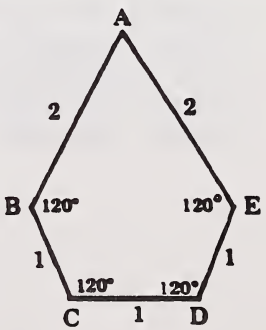
a	b	∠C	c	c^2	$a^2 + b^2$	comparez c^2 à $a^2 + b^2$
3	4	30°				
3	4	45°				
3	4	60°				
3	4	80°				
3	4	90°				
3	4	120°				
etc.		etc.				

Problème 1 : Résoudre le triangle ABC si ∠B = 22,3°, le côté a = 5 et le côté c = 4. (Attention ∠A est un angle obtus).

Solution : b = 2, ∠C = 49,3° et ∠A = 108,3°.

Note : Si les élèves calculent l'angle A à l'aide de la loi du sinus, la calculatrice donne un angle aigu et les autres dimensions du triangle conduisent à une solution non fondée. Autrement dit, le plus grand angle du triangle devrait être opposé au plus grand côté et le plus petit angle devrait être opposé au plus petit côté. Si les élèves appliquent la loi du cosinus pour déterminer le plus grand angle, la calculatrice donne alors l'angle obtus.

Problème 2 : Quelle est la longueur de AC ?



Réponse : $\sqrt{7} \doteq 2{,}6$

Tiré de National Council of Teachers of Mathematics, Mathematics Teachers, décembre 1988.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les parenthèses de la calculatrice peuvent être utiles pour déterminer le cosinus d'un angle à l'aide de la seconde formule de la loi du cosinus. Ces formules peuvent être incluses dans le programme d'une calculatrice graphique, la mise en mémoire s'avérant alors superflue.

Reportez-vous à M11, pages 427 à 429, « Computer Power »
Reportez-vous à MPP11, page 269, « Computer Insight : Classifying Triangles »

Vidéo :
Trigonometric Functions I (TV Ontario) : No. 5, The Cosine Law; No. 6, Applications of the Sine Law and Cosine Law.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 432 à 438
BMS, 5A : pages 200 à 203
INF, M534 : pages 221 à 226

POLYNÔMES ET EXPRESSIONS RATIONNELLES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 8 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les expressions rationnelles sont des fractions dans lesquelles les numérateurs et les dénominateurs sont des polynômes et qu'il est possible d'effectuer des opérations arithmétiques sur de telles expressions.	Les élèves devront être en mesure de déterminer les valeurs non acceptables d'expressions rationnelles à une inconnue. Les élèves devront être en mesure de simplifier des expressions rationnelles à l'aide de la mise en facteurs. Les élèves devront être en mesure de multiplier et de diviser des expressions rationnelles. Les élèves devront être en mesure d'additionner et de soustraire des expressions rationnelles. Les élèves devront être en mesure de résoudre des équations comprenant des expressions rationnelles.	Les élèves devront utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour tracer les graphiques des fonctions rationnelles afin de déterminer les valeurs non acceptables. Les élèves devront résoudre des problèmes portant sur des équations formées d'expressions rationnelles.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les expressions rationnelles sont des fractions dans lesquelles les numérateurs et les dénominateurs sont des polynômes et qu'il est possible d'effectuer des opérations arithmétiques sur de telles expressions.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 déterminer les valeurs non acceptables d'expressions rationnelles à une inconnue;

1.1.1 utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour tracer les graphiques des fonctions rationnelles afin de déterminer les valeurs non acceptables;

1.2 simplifier des expressions rationnelles à l'aide de la mise en facteurs.

REMARQUES

Les élèves n'ont aucune expérience des expressions rationnelles. Révisez la définition d'un polynôme en y incluant les restrictions relatives aux exposants négatifs ou rationnels (x^{-2} et $x^{\frac{1}{2}}$ ne sont pas des polynômes). En Mathématiques 23, les élèves ont étudié les types de mise en facteurs suivants : les facteurs communs, la différence des carrés et $ax^2 + bx + c$ pour les nombres entiers relatifs a, b et c. Mettez l'accent sur tous les types de mise en facteurs, afin que la simplification d'expressions rationnelles devienne un exercice de mise en facteurs plutôt qu'une simple suppression de termes. La somme et la différence des cubes ne doivent pas faire partie de l'étude des expressions rationnelles.

La question suivante illustre bien la nécessité de la mise en facteurs :

$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} \div \frac{3x + 6}{x^2 + 2x}$$

a. Sans simplifier, comment la valeur de l'expression change-t-elle si la valeur de x passe de 1 à 3 ?
Réponse : -2 à 10

b. De quelle façon la valeur de l'expression simplifiée est-elle modifiée si la valeur de x croît et passe de 1 à 3 ? Les élèves doivent effectuer une mise en facteurs afin d'éviter l'annulation de x^2, des « 2 » et des « 4 », ce que certains risquent d'être tentés de faire. Les réponses doivent être identiques, justifiant ainsi la nécessité de la technique de la mise en facteurs.

L'utilisation d'un facteur -1 devrait aussi être révisée; autrement dit, $\frac{(a - b)}{(b - a)} = -1$.

Des fractions suivantes, lesquelles sont équivalentes à $\frac{y - x}{x + y}$:

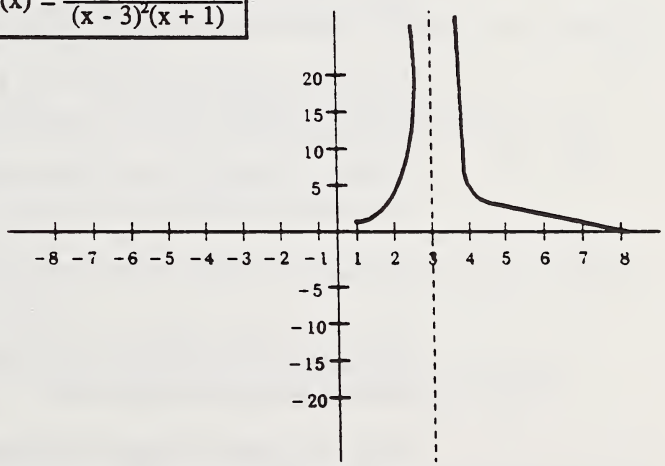
a. $\frac{-x - y}{x + y}$ b. $\frac{-y - x}{x + y}$ c. $-\frac{-(y - x)}{x + y}$ d. $\frac{y - x}{y + x}$

Valeurs non acceptables : Pour déterminer les valeurs qui ne sont pas acceptables, la représentation visuelle à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice graphique permet de mieux comprendre la signification de la non validité d'un ou de plusieurs points. Le dénominateur d'une fraction ne peut être zéro, car celle-ci serait alors indéfinie.

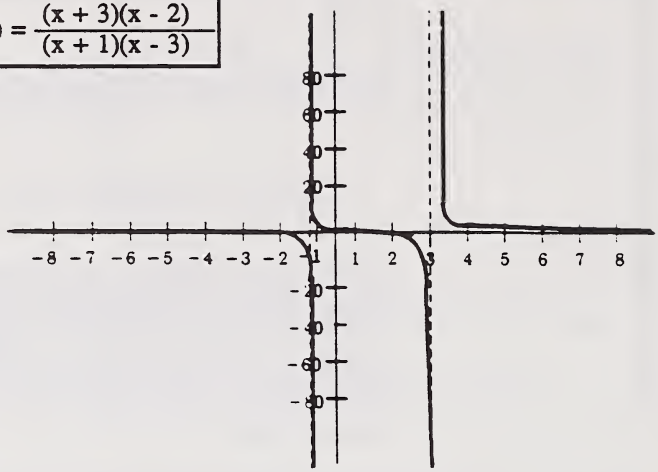
Note : Lors de la représentation graphique d'expressions rationnelles dont les facteurs ne sont pas également divisibles, l'ordinateur ou la calculatrice indique les valeurs non acceptables par une asymptote. Par contre, lorsqu'un facteur est divisible, le graphique illustre uniquement la réponse et la valeur non acceptable de ce facteur est éliminée.

Les graphiques suivants illustrent bien ce problème.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 3)^2(x + 1)}$$



$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 1)(x - 3)}$$



Attention : Lorsqu'un facteur du dénominateur se divise, un « trou d'épingle » est produit et les outils technologiques semblent être limités pour illustrer cette situation. Lors de la représentation graphique d'équations rationnelles, il est recommandé de tracer le graphique des deux côtés de l'équation séparément.

Ainsi, $\frac{x}{x + 1} = \frac{x^2}{x^2 + x}$

Ceci illustrera le « trou » mentionné ci-dessus.

Les élèves n'ont peut-être jamais eu à résoudre d'équations dans laquelle la variable figure dans le dénominateur. Les valeurs non acceptables de ce type d'équations devront être celles qui, une fois élevées au carré, peuvent facilement être mises en facteurs à l'aide des méthodes mentionnées précédemment.

Ainsi, $x - 2 = 8/x$, $x \neq 0$, $x = 4$ et -2

Si on résout cette équation en utilisant zéro pour les facteurs, cela peut mener à des valeurs non acceptables lorsque les facteurs du dénominateur sont des binômes.

Note : Les élèves devraient identifier les valeurs non acceptables des expressions rationnelles avant de simplifier.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \frac{(x^2 + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)} \qquad x \neq -2, -1$$

$$= \frac{(x - 1)}{(x + 1)} \qquad x \neq -2, -1.$$

L'exemple suivant illustre concrètement ce que sont les valeurs non acceptables.

Force de gravité $= \frac{(4{,}0 \times 10^{14})M}{r^2}$

soient M = la masse et r = la distance du centre de chacun.

Pour un astronaute pesant 85 kg sur terre ($6{,}37 \times 10^6$ m depuis le centre de la terre), la force de gravité est

$$Fg = \frac{(4{,}0 \times 10^{14})(8{,}5 \times 10^1)}{(6{,}37 \times 10^6)^2}$$
$$= 830 \text{ N (newtons)}$$

Calculez la force de gravité pour ce même astronaute ($3{,}6 \times 10^7$) depuis le centre de la terre.

Réponse : 26 N (la distance depuis le centre de la terre ne peut jamais être zéro).

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème : Pour quel substitut de x l'expression $\frac{x - 5}{x^3 - 16x}$ n'aura-t-elle pas d'inverse ?

Réponse : x = 5
(Nous tenons à remercier F. Heinen, du Lethbridge Collegiate Institute.)

Problème : Pour combien de valeurs de x l'expression $(x^2 - 9)(x - 1)$ est-elle égale à $(x^2 - 4x + 3)(x + 3)$?

Réponse : Toutes les valeurs de x.
(Nous tenons à remercier F. Heinen, du Lethbridge Collegiate Institute.)

MATIÈRE FACULTATIVE

Déterminez les valeurs non acceptables des fractions complexes suivantes.

$$\frac{\frac{a}{1+a} + \frac{1-a}{a}}{\frac{a}{1+a} - \frac{1-a}{a}} \qquad a \neq 0, -1, \pm 1/\sqrt{2}$$

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Logiciel :

- Master Grapher (Addison-Wesley), option « Function Grapher ».
- Computer Graphing Experiments (Addison-Wesley).
- Factoring Algebraic Expressions, (Mindscape) - édition revue.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

CONCEPT 1 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que les expressions rationnelles sont des fractions dans lesquelles les numérateurs et les dénominateurs sont des polynômes et qu'il est possible d'effectuer des opérations arithmétiques sur de telles expressions.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.3 multiplier et diviser des expressions rationnelles;

1.4 additionner et soustraire des expressions rationnelles;

1.5 résoudre des équations comprenant des expressions rationnelles;

1.5.1 résoudre des problèmes portant sur des équations formées d'expressions rationnelles.

REMARQUES

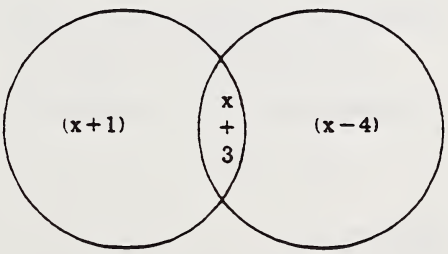
La simplification d'expressions rationnelles présentées en 1.2 est approfondie afin d'aborder la multiplication et la division en 1.3. Prenez note de la limite imposée en 1.4 : les élèves ne sont tenus d'additionner et de soustraire que deux expressions rationnelles.

Déterminer le dénominateur commun lors d'une addition et d'une soustraction s'avère souvent difficile. Nous essaierons d'illustrer ce concept à l'aide de deux cercles qui s'entrecoupent.

$$\frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+1}{x^2-x-12}$$

facteurs
$(x + 3)(x + 1)$

facteurs
$(x + 3)(x - 4)$



PPDC (plus petit dénominateur commun)
$(x - 1)(x + 3)(x - 4)$

L'objectif 1.5 ne devrait être limité qu'à des équations formées d'expressions rationnelles du premier degré jusqu'à ce que les élèves aient étudié l'unité portant sur la résolution d'équations quadratiques. Les élèves n'ont sans doute pas vu, en Mathématiques 23, les équations dont le dénominateur est une inconnue. Les dénominateurs communs deviennent d'autant plus importants que l'élimination des fractions facilite la résolution d'équations.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1.5.1 : Si l'inverse de $x + 1$ est $x - 1$, alors $x =$ ___.

Réponse : $x = \pm \sqrt{2}$

Problème : La fraction $(5x - 11)/(2x^2 + x - 6)$ est le résultat de l'addition des deux fractions $A/(x + 2)$ et $B/(2x - 3)$. Calculez les valeurs de A et de B.

Réponse : $A = 3$ et $B = -1$

Ce problème permet aussi de revoir la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Problème : Pour résoudre l'équation $\frac{x - 5}{x} = \frac{x - 5}{x + 1}$, Jean a fait le raisonnement suivant :

« Puisque les numérateurs sont égaux, les dénominateurs sont donc égaux. Par contre, ceci est impossible puisque x ne peut pas être égal à $x + 1$. Donc, il n'y a aucune solution ». Le raisonnement de Jean est-il juste ? Dans la négative, quelle erreur commet-il ? Quelle est la solution ?
(Nous tenons à remercier F. Heinen, du Lethbridge Collegiate Institute.)

Problème : L'expression $A = 1/(x - 2)^2$ représente l'aire d'un rectangle. Il s'agit de calculer la largeur de ce rectangle si l'expression $L = (3x - 1)/(2x^2 + 3x - 14)$ en représente la longueur.
(Nous tenons à remercier M. Ray, du J.A. Williams High School.)

Réponse : $L = \frac{2x + 7}{(x - 2)(3x - 1)}$

Problème : Si $x + y = 6$, évaluer :

$$\frac{x}{x - 3} + \frac{y}{y - 3}$$

Réponse : 2

Ce problème met l'accent sur le dénominateur commun ainsi que sur des facteurs communs simples.

Problème : Si $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

Exprimez z en fonction de x et y.

Réponse : $z = \frac{xy}{y - x}$

Problème : Le produit de deux nombres est quatre et leur somme est 12. Calculer la valeur de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Réponse : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{(x + y)}{xy} = \frac{12}{4} = 3$

Les problèmes portant sur la distance, la vitesse et le temps appliquent les techniques de résolution d'expressions rationnelles.

Problème : Si une voiture diminue sa vitesse de 30 km/h sur une distance de 700 km, le trajet prendra 3 heures de plus. Quelle est la vitesse actuelle de cette voiture ? (Construire un tableau.)

$$\frac{700}{v - 30} - \frac{700}{v} = 3$$

Réponse : 100 km/h.

Problème : Trouvez une expression simplifiée pour représenter une augmentation de $\frac{4}{3 - y}$ à la différence entre $\frac{1}{y + 3}$ et $\frac{3y - 1}{y^2 - 9}$.

Réponse : $\frac{-6y - 14}{y^2 - 9}$

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 211 à 217
BMS, 5A : pages 131 à 133
INF, M534 : pages 171 à 184
M 064-424 : pages 111 à 150

FONCTIONS ET RELATIONS
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 16 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que certains phénomènes observés dans la vie courante sont quantitativement reliés les uns aux autres et que ces relations peuvent être représentées graphiquement à l'aide d'ensembles de couples ordonnés, de règles et d'équations.	Les élèves devront être en mesure de représenter graphiquement des relations qui décrivent des phénomènes physiques ou des situations courantes.	Les élèves devront résoudre des problèmes à l'aide de graphiques, puis interpréter ces graphiques qui décrivent des phénomènes physiques ou des réalités quotidiennes.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que pour certaines relations, appelées fonctions, la valeur de la variable indépendante (domaine) détermine de façon unique la valeur de la variable dépendante (valeur de la fonction, image).	Les élèves devront être en mesure de représenter des situations mathématiques simples, comme les variations (directe et inverse), à l'aide de tables de valeurs, d'identifier les variables dépendante et indépendante, de même que d'exprimer le domaine et l'image, en indiquant les restrictions pertinentes. Les élèves devront être en mesure d'interpoler et d'extrapoler d'après les graphiques de relations fonctionnelles simples. Les élèves devront être en mesure de décrire des relations simples à l'aide de la notation fonctionnelle et à l'aide de graphiques, puis d'évaluer celles-ci en substituant des remplacements appropriés du domaine. Les élèves devront être en mesure d'illustrer et de reconnaître, algébriquement et graphiquement, différents types de fonctions de la liste suivante : fonctions linéaires, fonctions polynomiales (y compris les fonctions quadratiques et cubiques), fonctions réciproques, fonctions à valeur absolue et fonctions exponentielles.	Les élèves devront résoudre des problèmes algébriquement ou par l'interprétation de graphiques représentant des fonctions. Les élèves devront tracer puis analyser les graphiques des fonctions à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent de quelle façon des paramètres particuliers peuvent servir à modifier des translations, des réflexions ou des allongements verticaux de toute fonction.	Les élèves devront être en mesure de décrire les effets de transformation des paramètres a et b, dans $y = f(x - a) + b$, sur le graphique de $y = f(x)$. Les élèves devront être en mesure de décrire les effets de transformation du paramètre c, dans $y = cf(x)$, sur le graphique de $y = f(x)$. Les élèves devront être en mesure de décrire et tracer les graphiques de $y = cf(x - a) + b$.	Les élèves devront étudier les effets exercés par les paramètres a et b sur le graphique de $y = f(x - a) + b$. Les élèves devront étudier les effets exercés par le paramètre c sur le graphique de $y = cf(x)$. Les élèves devront tracer les graphiques des fonctions sous forme $y = cf(x - a) + b$ à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que certains phénomènes observés dans la vie courante sont quantitativement reliés les uns aux autres et que ces relations peuvent être représentées graphiquement à l'aide d'ensembles de couples ordonnés, de règles et d'équations.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 représenter graphiquement des relations qui décrivent des phénomènes physiques ou des situations courantes;

1.1.1 résoudre des problèmes à l'aide de graphiques, puis interpréter ces graphiques qui décrivent des phénomènes physiques ou des réalités quotidiennes.

REMARQUES

Cette unité constitue un approfondissement de l'unité « Relations » du cours de Mathématiques 13. On y retrouve de très bonnes activités tirées du « Guide du maître de Mathématiques 13 ». Les relations linéaires représentent un des sujets importants discutés en Mathématiques 23. Le concept de la corrélation et la technique des nuages de points abordés à l'unité « Statistiques » de Mathématiques 33 peuvent constituer une excellente introduction à cette unité.

Les élèves devraient être exposés à des expériences dans un certain nombre de domaines. À la section « Processus et contexte de résolution de problèmes », on retrouve quelques exemples d'expériences.

1. Expériences « imaginées » : ce sont des situations dans lesquelles on trace le graphique de deux variables interdépendantes. Ces expériences n'impliquent pas nécessairement des formules ou des nombres.

2. Interprétation graphique : soit un graphique donné de deux variables interdépendantes. On pose des questions sur ce graphique. La formule servant à produire ce graphique n'est habituellement pas donnée.

3. La réalisation d'expériences à l'aide d'appareils simples.

4. La création de tables de valeurs à partir d'une situation calculable. Dans certains cas, il peut être approprié d'écrire une formule qui établit une relation entre deux variables.

5. Le développement de formules qui peuvent être étudiées.

6. L'utilisation de la calculatrice comme d'une « boîte noire » : on associe souvent la fonction à une boîte qui, d'une façon quelconque, transforme des nombres en de nouveaux nombres selon une certaine logique. Ceci décrit précisément l'action de la calculatrice. Il est possible de tracer les graphiques de certaines fonctions comme « log », « sin », « n! » ou « tg - 1 », sans pleinement comprendre le rôle de ces fonctions. Le fait que certaines valeurs risquent d'induire en erreur peut mener à une discussion sur le domaine et l'image.

Les concepts étudiés dans la présente unité sont difficiles à comprendre s'ils sont abordés individuellement. Il serait bon, par exemple, de présenter la notation fonctionnelle au tout début de l'unité. Il est aussi préférable d'introduire le domaine et l'image dans un contexte de résolution de problèmes, comme les problèmes qui suivent.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Pour un bref résumé de chacun des types d'expériences décrits ci-dessous, reportez-vous à la section « Remarques ».

1. Expériences imaginées

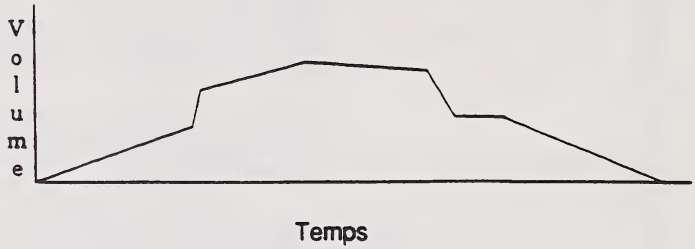
   a. Tracer le graphique de ta taille par rapport à ton âge.
   b. Tracer le graphique de la température de l'eau dans un verre par rapport à sa température après y avoir ajouté un cube de glace.
   c. Soit un parcours de montagnes russes, tracer un graphique de la vitesse à laquelle le wagon est propulsé par rapport à la distance du trajet[1].
   d. Soit la carte d'une piste de course, tracer un graphique de la vitesse par rapport à la position sur la piste. Il est parfois possible de retrouver le tracé d'une piste particulière dans le journal. Dans le cas contraire, les élèves peuvent dessiner leur propre piste.

2. Interprétation de graphiques

   a. On donne un graphique représentant la vitesse par rapport au temps de parcours sur des montagnes russes ou sur une piste de course. Les élèves tentent de dessiner le profil de ces montagnes russes ou de cette piste de course.

[1] National Council of Teachers of Mathematics, Curriculum and Evaluation Standards, page 83.

b. On donne le graphique du volume d'eau dans une baignoire. Les élèves doivent, par écrit, expliquer ce graphique.



Voir aussi l'unité « Fonctions et relations » du guide du maître du cours de Mathématiques 20.

3. Expériences concrètes

a. On trace le graphique de la longueur d'un ressort par rapport à la mesure de la masse placée sur ce ressort. Il est très facile de se procurer l'équipement nécessaire dans un département de science.
b. La période d'un pendule représente le temps requis pour effectuer une oscillation complète. Il s'agit de tracer le graphique de la période par rapport à la longueur de ce pendule.

4. Table de valeurs d'après des situations calculables

a. Le problème du poteau de téléphone[2].
b. Le rayon d'une grande roue mesure 10 m. Une révolution complète se fait en 40 secondes. Si une chaise se rapproche à 1 m du sol, tracer un graphique représentant la hauteur par rapport au temps requis pour effectuer deux révolutions complètes.
c. Un fermier dispose de 100 m de fil barbelé pour faire une clôture. Il entend construire un enclos rectangulaire. Tracer un graphique représentant la largeur de cet enclos par rapport à l'aire.
d. Un appel interurbain à Vancouver coûte 82 cents pour la première minute et 62 cents pour chaque minute additionnelle ou fraction de minute. Tracer un graphique représentant le coût par rapport à la durée de l'appel.

---

[2] « Problem Solving in Mathematics : Focus for the Future », page 57.

e. On a construit des triangles avec des allumettes. Il s'agit d'établir une table de valeurs et de tracer un graphique représentant le nombre d'allumettes par rapport au nombre de triangles. Écrire une formule pour établir une relation entre les deux variables.

Réponse :

t	a
1	3
2	5
3	7

$a(t) = 2t + 1$

f. Des cubes sont aboutés. Il en résulte que certaines des faces sont « découvertes ». Établir une table de valeurs, puis tracer le graphique de la formule qui établit une relation entre le nombre de cubes et le nombre de faces.

Réponse :

c	f
1	6
2	10
3	14
4	18

$f(c) = 4c + 2$

g. Dans une ligue sportive, le nombre des parties jouées est déterminé en fonction du nombre d'équipes faisant partie de la ligue. Présumons que chaque équipe joue deux fois contre chacune des autres équipes. Tracer un graphique et écrire une formule pour indiquer la relation entre le nombre de parties et le nombre d'équipes.

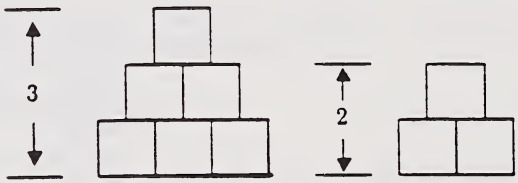
Réponse :

équipes	parties
2	2
3	6
4	12
5	20

Pour certains, la formule peut sembler difficile à déterminer. Le nombre de parties est le produit du nombre d'équipes multiplié par le nombre d'équipes moins 1.

parties = équipes × (équipes - 1)
y(e) = e(e - 1)

h. On a construit des pyramides avec des blocs. La hauteur de la pyramide dépend du nombre de blocs utilisés. Tracer le graphique et écrire une formule.



Réponse :

blocs	hauteur
1	1
2	3
3	6
4	10

Le produit du nombre de blocs multiplié par le nombre de blocs plus 1 est toujours égal à deux fois la hauteur.

$$\text{hauteur} = \frac{\text{blocs} \times (\text{blocs} + 1)}{2}$$

ou

$$h(b) = \frac{b(b + 1)}{2}$$

5. Étude des formules

Pour chacune des formules suivantes :
a. employer la notation fonctionnelle;
b. tracer le graphique;
c. discuter du domaine et de l'image.

i. L'aire d'un cercle, A, est donnée par la formule $A = \pi r^2$.

ii. On laisse tomber un objet. La hauteur, h, au-dessus du sol d'où on a laissé tomber cet objet est déterminée à l'aide de la formule suivante :

$h = 22t - 5t^2 + 2$ (h est en mètres et t en secondes).

iii. La somme des angles internes d'un polygone à n côtés est déterminée par la formule ci-dessous :

$S = 180(n - 2)$.

iv. Dans une ligue comprenant e équipes, chaque équipe joue trois fois contre chacune des autres équipes. Le nombre de parties jouées, P, est identifié par cette formule :

$$P = \frac{3e(e - 1)}{2}.$$

6. Calculatrice en tant que « boîte noire » des activités

Établir une table de valeurs et tracer un graphique à l'aide des touches suivantes de la calculatrice : log, sin, n! et racine carrée. L'objectif de cet exercice ne consiste pas à comprendre l'importance mathématique de ces fonctions, mais plutôt d'illustrer que deux nombres sont « associés » par l'emploi de ces fonctions.

Problème : Compléter les tables de valeurs suivantes, puis écrire une formule « décrivant » chaque table.

a.

a	b
2	3
4	5
6	7
9	?

b.

r	m
1	2
2	5
3	8
4	?

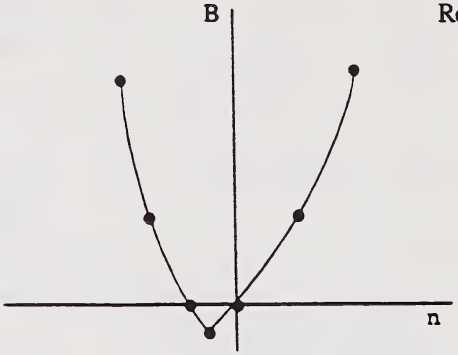
c.

h	k
2	5
3	10
4	17
5	?

Réponse : a. 10, $b(a) = a + 1$
b. 11, $m(r) = 3r - 1$
c. 26, $k(h) = h^2 + 1$

Problème : Demandez à chaque élève de créer sa propre table de valeurs basée sur une formule de son cru. Les autres élèves de la classe essaieront alors de « découvrir » cette formule. Donnez-leur comme objectif de trouver une formule dont le quotient de difficulté est tel que seulement 75 % des élèves pourront trouver cette formule.

Problème : Donnez un graphique aux élèves. Demandez-leur de trouver une formule pour décrire la relation illustrée. (Ils devraient probablement construire une table de valeurs d'après ce graphique).



Réponse :

n	B
-4	8
-3	3
-2	0
0	0
1	3
2	4

Mettez l'accent sur les valeurs positives de « n »; B est le produit de « n » et deux de plus que « n ».

$B(n) = n(n + 2)$

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que pour certaines relations, appelées fonctions, la valeur de la variable indépendante (domaine) détermine de façon unique la valeur de la variable dépendante (valeur de la fonction, image).

Les élèves doivent être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 représenter des situations mathématiques simples, comme les variations (directe et inverse), à l'aide de tables de valeurs, identifier la variable dépendante et la variable indépendante, de même qu'exprimer le domaine et l'image, en indiquant les restrictions pertinentes;

2.2 interpoler et extrapoler d'après les graphiques de relations fonctionnelles simples;

2.3 décrire des relations simples à l'aide de la notation fonctionnelle et à l'aide de graphiques, puis évaluer celles-ci en substituant des remplacements appropriés du domaine;

2.3.1 résoudre des problèmes algébriquement ou par l'interprétation de graphiques représentant des fonctions.

REMARQUES

Certains des objectifs de cette unité ont peut-être été présentés dans le cadre du concept précédent. Le présent concept porte sur la variation. L'étude de celle-ci devrait être limitée aux exemples donnés. L'étude traditionnelle de la variation ne fait pas partie de nos objectifs. Ceci peut se faire sans même avoir à mentionner les termes variation directe, variation partielle et variation inverse.

Il n'est pas toujours facile de déterminer laquelle de deux variables est dépendante de l'autre. Si un graphique représente la distance parcourue en voiture par rapport à la consommation d'essence, par exemple, la variable indépendante peut être déterminée par la réponse à une question. Ce qui semble le plus sensé détermine la question à laquelle il faut répondre, soit : a) la consommation d'essence dépend de la distance parcourue ou b) la distance parcourue dépend de la consommation d'essence.

Rappelez-vous de l'importance accordée aux relations linéaires en Mathématiques 23. Certains élèves se souviendront sûrement de certaines des techniques d'écriture des équations linéaires. Dans ce concept, la méthode principale « d'écriture d'équations » ne devrait toutefois pas avoir recours aux méthodes algébriques. L'équation devrait décrire le résultat de la relation entre deux variables, ce que l'élève pourrait ensuite expliquer, par écrit, après avoir étudié la table de valeurs. En examinant la table de valeurs ci-dessous, par

exemple, l'élève peut constater que chaque valeur de la rangée « m » est toujours le produit de la multiplication de la valeur « n » par 2 plus 7. Ce qui mène à l'équation m(n) = 2n + 7.

n	2	3	4	5	6
m	11	13	15	17	19

Une fonction écrite pour décrire la variation devrait aussi servir à prédire les valeurs de la variable indépendante qui ne sont pas indiquées dans la table de valeurs (extrapolation et interpolation). À l'application de cette fonction, les valeurs de la variable indépendante ne produiront pas toutes les valeurs « acceptables » de la variable dépendante. La formule suivante, qui sert à calculer le coût de location d'une voiture par jour, soit Coût = 0,10 × Xn + 30, n étant le nombre de kilomètres parcourus par jour, en est un exemple. La valeur 5 000 pour n n'est peut-être pas très réaliste, étant donné qu'il est impossible de parcourir une aussi grande distance en une journée. L'agence de location facturera probablement au kilomètre ou à la fraction de kilomètre, ce qui signifie donc qu'une évaluation des valeurs de n telles 500,2 serait tout aussi mal choisie.

Le domaine et l'image de ces fonctions doivent être abordés. Ceux-ci devraient être écrits sous forme de phrases plutôt que selon la notation mathématique habituelle. La formule ci-dessus, par exemple, qui est associée au coût de location d'une voiture, peut nous donner le domaine et l'image suivants :

Domaine : La formule est limitée aux nombres entiers comme valeurs de « n », puisque l'agence facture toute fraction de kilomètre. Conduire sur une distance de 1 000 km en une journée serait improbable.

Image : Le coût minimal serait supérieur à 30 $, étant donné que ce montant n'inclut pas la distance parcourue. Le coût maximum serait probablement d'environ 130 $.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité : Dans chacun des cas suivants,

a. identifier les variables dépendante et indépendante et créer une table de valeurs;
b. écrire une fonction pour décrire la table de valeurs;
c. tracer le graphique de la table de valeurs (se demander s'il faut unir les points ou non);
d. discuter du domaine et de l'image.

1. La consommation d'essence d'une voiture est de 7 km au litre. La capacité du réservoir est de 70 L.

2. Une agence de location de voitures facture 12 cents du kilomètre, plus 20 $ la journée.

3. Le temps nécessaire pour doubler une somme d'argent dépend du taux d'intérêt. Supposons que l'argent est composé annuellement et que la banque n'offre que des pourcentages entiers allant de 5 % à 15 % comme taux d'intérêt.

4. Chez Pizza Leonardo, on offre une pizza carrée. Le centimètre carré de pizza coûte 2,5 cents. Ces pizzas peuvent avoir les dimensions suivantes : 15, 20, 25, 30 et 40 cm.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 63 à 66 et 71 à 76
BMS, 4D : pages 240 à 245
BMS, 5A : pages 93 à 96

CONCEPT 2 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que pour certaines relations, appelées fonctions, la valeur de la variable indépendante (domaine) détermine de façon unique la valeur de la variable dépendante (valeur de la fonction, image).

Les élèves doivent être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.4 illustrer et reconnaître, algébriquement et graphiquement, différents types de fonctions de la liste suivante : fonctions linéaires, fonctions polynomiales (y compris les fonctions quadratiques et cubiques), fonctions réciproques, fonctions à valeur absolue et fonctions exponentielles;

2.4.1 tracer, puis analyser les graphiques des fonctions à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs.

REMARQUES

Le but de ce concept consiste à présenter aux élèves quelques-unes des relations entre deux variables. Ils doivent pouvoir classifier ces relations selon la formule utilisée et le graphique obtenu. Les relations discutées devraient être limitées à celles qui sont mentionnées ci-dessus. Il est à noter qu'il ne sera question d'aucune relation autre que fonctionnelle.

Dans les précédents concepts, les élèves ont identifié les variables dépendante et indépendante à l'aide de plusieurs noms différents. Toutefois, de façon générale, la lettre « y » représente une variable dépendante et « x » représente une variable indépendante. Étant donné que la plupart des logiciels graphiques exigent que les formules soient entrées de cette façon, les élèves doivent apprendre à s'y conformer.

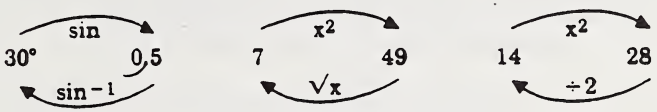
Les élèves savent sans doute déjà comment construire une table de valeurs, puis tracer les graphiques d'après cette table. Ils doivent toutefois consacrer presque tout leur temps à tracer des graphiques à l'aide d'un logiciel.

Il ne devrait être question de problèmes portant sur le domaine et l'image que si l'élève peut en obtenir les graphiques ou avoir la possibilité de tracer ces graphiques. La notation mathématique communément employée pour indiquer le domaine et l'image n'entre pas dans le cadre de ce cours. Les élèves auront donc la permission de décrire, sous forme de phrases, le domaine et l'image, même si on perd ainsi un peu de la précision de la notation mathématique.

Les élèves ont déjà une idée des fonctions réciproques :

a. $\sqrt{x}$ et x^2
b. sin et $\sin^{-1}$
c. multiplication et division par 2.

Une fonction réciproque « renverse » l'action d'une fonction donnée, comme dans l'exemple qui suit.



Pour des suggestions, reportez-vous à l'activité 6.

La définition de la réciproque d'une fonction est basée sur la relation entre les valeurs figurant dans une table de valeurs. Si le point (a, b) est inclus dans la table de valeurs d'une fonction, alors le point (b, a) se trouve dans la table de valeurs de la fonction réciproque. À l'aide de la notation fonctionnelle, ceci peut être établi comme suit : Si $f(a) = b$, alors $f^{-1}(b) = a$. Par conséquent, étant donné le graphique d'une fonction, un élève pourrait tracer le graphique de la réciproque. (Reportez-vous à l'activité 5.)

Dans certains cas, il est possible de déterminer la formule de l'inverse, mais cela ne représente pas notre but premier.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Reportez-vous aux graphiques à la page 262. Demandez aux élèves de découper ces graphiques et de les classer selon les catégories qu'ils choisissent. Ces dernières ne doivent pas nécessairement être « mathématiques ». Elles doivent aussi être identifiées. L'enseignant indiquera par la suite son choix de catégories.

Activité 2 : Demandez aux élèves de décrire tout type de relation entre deux variables, puis d'écrire une équation, et enfin, de tracer un graphique représentant cette relation. Le graphique ainsi obtenu entre-t-il dans l'une des catégories ci-dessus ?

Exemples :
a. La valeur de y est le produit de la valeur de x multipliée par la valeur de x moins trois.

b. La valeur de y est la différence entre x au carré et trois fois x.

c. La valeur de y est la différence entre la racine carrée de x et la racine cubique de x.

Activité 3 : Demandez aux élèves de décrire une relation, puis d'écrire une équation qui entre dans chacune des catégories définies par l'enseignant. (Certaines d'entre elles seront très difficiles.)

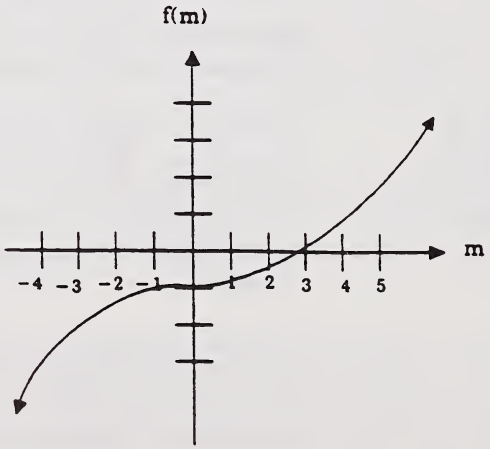
Activité 4 : Tracer le graphique et classer chacune des équations suivantes selon les catégories choisies par l'enseignant pour l'activité 1.

a. $y = x$
b. $y - x^2$
c. $y = |x|$
d. $y = 1/x$
e. $y = 2^x$
f. $y = 3^x$

Activité 5 : a. Déterminer ce qui suit à l'aide du graphique ci-dessous :

i. f(-3) ii. f(3) iii. f(0) iv. f(5)

b. Pour quelles valeurs de m, f(m) > 0 ?
c. Tracer le graphique de $f^{-1}(m)$
d. Trouver a. $f^{-1}(0)$, b. $f^{-1}(3)$



Activité 6 : Tracer des graphiques ayant les domaines et les images décrits ci-dessous. Indiquer plus d'une réponse pour chaque graphique.

a. Le domaine est tout nombre réel compris entre -1 et 2 inclusivement. L'image est tout nombre réel compris entre 2 et 5.

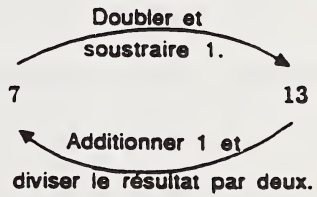
b. Le domaine est tout nombre entier compris entre -2 et 3 inclusivement, tandis que l'image est tout nombre entier relatif compris entre -10 et 0 inclusivement.

Activité 7 : Compléter le tableau ci-dessous.

Description	Équation	Description de la réciproque	Équation de l'inverse
Doubler un nombre et soustraire un	$y = 2x + 1$	Additionner un et diviser la somme par 2	$y = (1 + x)/2$
Élever un nombre au carré et ajouter trois			
Ajouter trois à un nombre et élever la somme au cube			

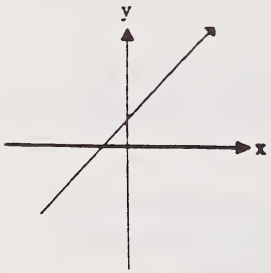
Note : La description de la réciproque est l'opération effectuée sur un nombre pour « renverser » l'effet produit par la fonction initiale.

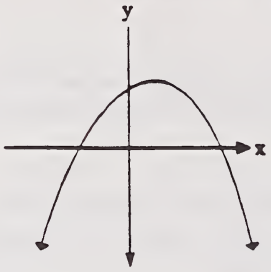
Exemple :

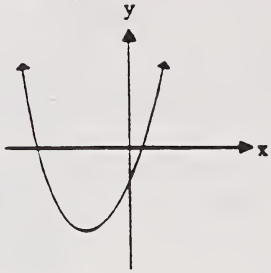


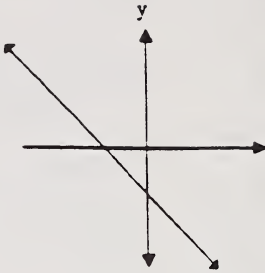
CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

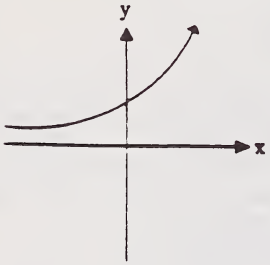
Graphiques de l'activité 1

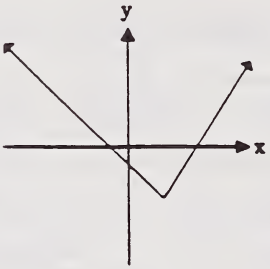


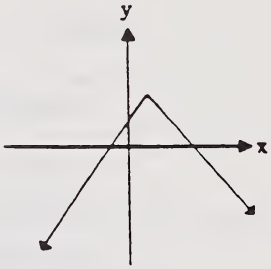


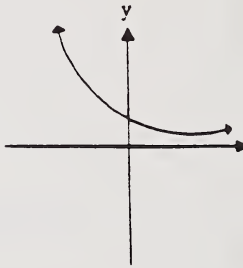


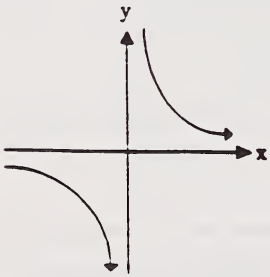


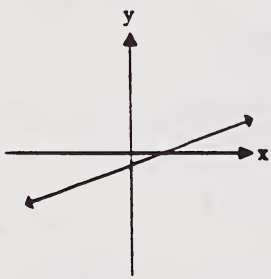


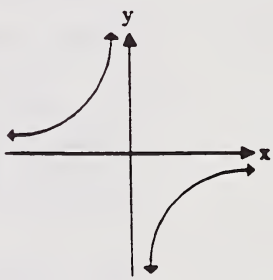


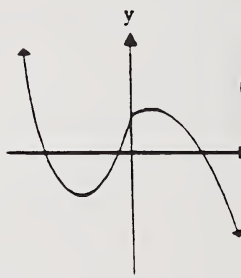


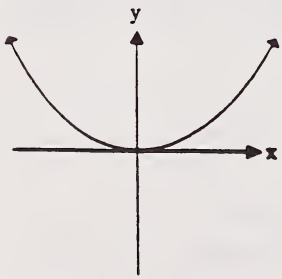


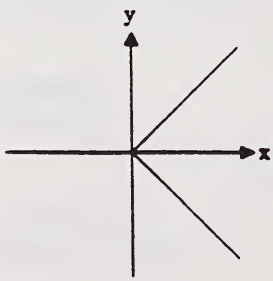


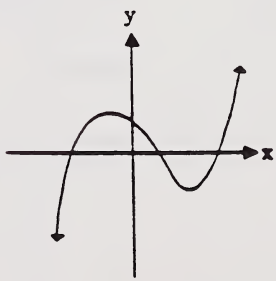


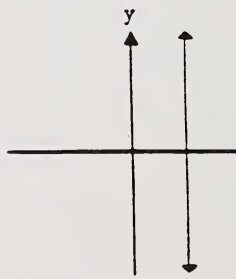


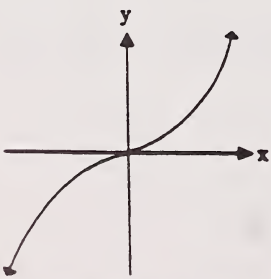


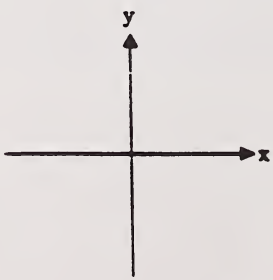












CONCEPT 3

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent de quelle façon des paramètres particuliers peuvent servir à modifier des translations, des réflexions ou des allongements verticaux de toute fonction.

Les élèves doivent être en mesure d'effectuer ce qui suit :

3.1 décrire les effets de transformation des paramètres a et b, dans $y = f(x - a) + b$, sur le graphique de $y = f(x)$;

3.1.1 étudier les effets exercés par les paramètres a et b sur le graphique de $y = f(x - a) + b$;

3.2 décrire les effets de transformation du paramètre c, dans $y = cf(x)$, sur le graphique de $y = f(x)$;

3.2.1 étudier les effets exercés par le paramètre c sur le graphique de $y = cf(x)$;

3.3 décrire et tracer les graphiques de $y = cf((x - a) + b$;

3.3.1 tracer les graphiques des fonctions sous forme $y = cf(x - a) + b$ à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs.

REMARQUES

Une fois que les élèves connaissent bien quelques-uns des types de base des fonctions, ils peuvent en « créer » de nouvelles par une transformation des fonctions originales. Différents effets sont produits par l'une ou plusieurs des opérations décrites ci-dessous.

1. L'addition ou la soustraction d'une constante à la fonction
   Exemple : $y = x$ devient $y = x + 3$
   ou $y = x^2$ devient $y = x^2 - 5$.

2. Remplacement par $(x + a)$ ou $(x - a)$
   Exemple : $y = |x|$ devient $y = |x + 4|$
   ou $y = x^2 + 3$ devient $y = (x - 5)^2 + 3$.

3. La multiplication par une constante positive
   Exemple : $y = x - 5$ devient $y = 2x - 10$
   ou $y = x^2 + 2x$ devient $y = 3x^2 + 6x$.

4. La multiplication par une constante négative
   Exemple : $y = 3x - 1$ devient $y = -6x + 2$.

La majeure partie de ce concept doit être apprise de façon « autodidacte ». Les élèves peuvent effectuer une activité semblable à l'activité 1, afin de découvrir les effets de transformation mentionnées ci-dessus. Ces effets doivent être écrits sous forme de paragraphes. Plusieurs élèves peuvent percevoir les mêmes transformations d'une façon légèrement différente.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 1 : Représenter graphiquement chacun des ensembles suivants, sur les mêmes axes de coordonnées.

Ensemble 1	$y = x^2$	$y = x^2 - 1$	$y = x^2 + 3$
Ensemble 2	$y = \|x\|$	$y = \|x\| - 1$	$y = \|x\| + 2$
Ensemble 3	$y = x^2 + 1$	$y = (x - 1)^2 + 1$	$y = (x + 2)^2 + 1$
Ensemble 4	$y = \|x\| - 2$	$y = \|x - 1\| - 2$	$y = \|x + 3\| - 2$
Ensemble 5	$y = x^2 + 2$	$y = 2x^2 + 4$	$y = 3x^2 + 6$
Ensemble 6	$y = x^2 - 2$	$y = -2x^2 + 4$	$y = -3x^2 + 6$

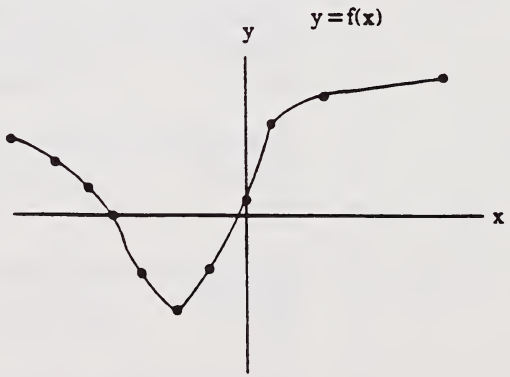
Répondre aux questions suivantes en fonction de chaque système d'équations.

1. Qu'est-ce qui a été accompli, mathématiquement, sur la première équation de chaque système de trois équations ?

2. Quel effet est produit sur le premier graphique par les changements apportés à l'équation ?

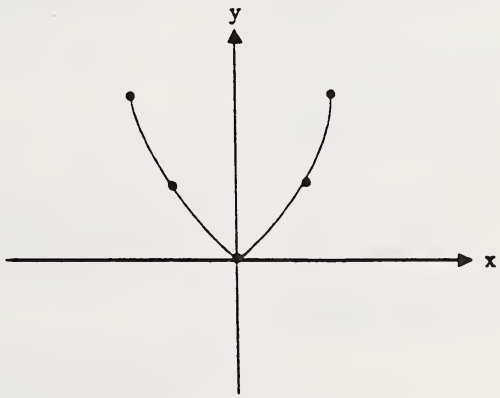
Problème : Étant donné $y = f(x)$ ci-dessous, tracer les graphiques suivants.

a. $y = f(x) - 1$ b. $y = 2f(x)$ c. $y = -f(x)$
d. $y = f(x - 2)$ e. $y = 2f(x + 1) + 2$



Problème : Le graphique de $y = x^2$ est représenté ci-dessous. Tracer ce graphique sur de nouveaux axes de coordonnées, afin qu'il devienne :

a. $y = (x + 2)^2$ b. $y = x^2 + 2$
c. $y = (x - 3)^2 - 1$ d. $y = x^2 + 2x$
(**Indice :** $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$)



CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

FONCTIONS ET ÉQUATIONS QUADRATIQUES
DEGRÉ D'IMPORTANCE SUGGÉRÉ : 17 %

Concepts	Habiletés	Résolution de problèmes/ Technologie
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que toute fonction qui peut être écrite sous la forme $y = ax^2 + bx + c$, pour $a \neq 0$, est une fonction quadratique et que chaque fonction possède des caractéristiques et un graphique qui lui sont propres.	Les élèves devront être en mesure de tracer les graphiques des fonctions quadratiques écrites sous la forme standard, soit $y = a(x - h)^2 + k$. Les élèves devront être en mesure de convertir des fonctions quadratiques écrites sous la forme générale, $y = ax^2 + bx + c$, à la forme standard $y = a(x - h)^2 + k$ en complétant le carré.	Les élèves devront examiner les effets produits par les paramètres a, h et k dans l'équation $y = a(x - h)^2 + k$, à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur. Les élèves devront déterminer le sommet, l'axe de symétrie, le domaine, l'image, les valeurs maximales et minimales, de même que les ordonnées à l'origine d'une fonction quadratique. Les élèves devront résoudre des problèmes comportant des fonctions quadratiques en analysant ces fonctions représentées sous forme de graphiques ou d'équations.
Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que trouver les abscisses à l'origine de la fonction quadratique $y = ax^2 + bx + c$ équivaut à résoudre l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$.	Les élèves devront être en mesure de résoudre des équations quadratiques à l'aide de la formule quadratique. Les élèves devront être en mesure d'identifier et d'expliquer la relation qui existe entre les abscisses à l'origine des fonctions quadratiques et les racines des équations correspondantes. Les élèves devront être en mesure de résoudre des équations formées d'expressions rationnelles et irrationnelles qui admettent, comme solutions, les racines d'équations quadratiques.	Les élèves devront déterminer les abscisses à l'origine de la fonction quadratique. Les élèves devront résoudre des problèmes portant sur des équations quadratiques. Les élèves devront résoudre des problèmes comportant des équations formées d'expressions rationnelles et irrationnelles qui admettent, comme solutions, les racines d'équations quadratiques.

CONCEPT 1

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que toute fonction qui peut être écrite sous la forme $y = ax^2 + bx + c$, pour $a \neq 0$, est une fonction quadratique et que chaque fonction possède des caractéristiques et un graphique qui lui sont propres.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

1.1 tracer les graphiques des fonctions quadratiques écrites sous la forme standard, soit $y = a(x - h)^2 + k$;

1.1.1 examiner les effets produits par les paramètres a, h et k dans l'équation $y = a(x - h)^2 + k$, à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur;

1.2 convertir des fonctions quadratiques écrites sous la forme générale, $y = ax^2 + bx + c$, à la forme standard $y = a(x - h)^2 + k$ en complétant le carré;

1.2.1 déterminer le sommet, l'axe de symétrie, le domaine, l'image, les valeurs maximales et minimales, de même que les ordonnées à l'origine d'une fonction quadratique;

1.2.2 résoudre des problèmes comportant des fonctions quadratiques en analysant ces fonctions représentées sous forme de graphiques ou d'équations.

REMARQUES

Si les élèves ont étudié l'unité « Fonctions et relations », les objectifs 1.1 et 1.1.1 ne seront qu'une révision pour la plupart d'entre eux (ces objectifs aident les élèves à faire le lien entre ces deux unités.) Si l'unité « Fonctions et relations » n'a pas déjà été abordée, vous déciderez peut-être de procéder de cette façon à l'avenir.

Comme il a été mentionné ailleurs dans les guides d'enseignement, l'ordre dans lequel le programme pédagogique est présenté n'est pas nécessairement l'ordre à suivre. Il faut toutefois respecter l'ordre des objectifs; ainsi, 1.2.1 doit suivre 1.1.1. Les élèves ont par conséquent l'occasion d'examiner ces propriétés en rapport avec les valeurs des paramètres a, h et k.

Afin de mieux faire comprendre l'objectif 1.2, l'analogie qui suit peut s'avérer utile pour les élèves. Soit l'exemple qui consiste à acheter un article quelconque dans un magasin et de demander que cet article nous soit livré en pièces détachées dans une boîte. L'article doit donc être ensuite assemblé. La « boîte » représente la forme générale, $y = ax^2 + bx + c$, de la fonction quadratique, et $y = a(x - h)^2 + k$, la forme « pratique ». Cette analogie peut aider à faire comprendre aux élèves la pertinence de techniques algébriques, comme celle qui consiste à « compléter le carré ».

L'objectif 1.2 peut aussi aider à établir le lien entre la représentation graphique de la fonction quadratique et la forme standard de l'équation. Ce développement amène une plus grande compréhension de la formule quadratique (objectif 2.1).

À l'objectif 1.2.1, ces propriétés doivent être définies, expliquées en détails puis illustrées par rapport au graphique d'une parabole. Il faut souligner l'importance de bien comprendre ces propriétés pour terminer l'unité avec succès. Cette section se prête volontiers à des projets comme ceux décrits plus loin. L'étude des relations et des fonctions a sûrement permis aux élèves d'apprendre plusieurs des transformations discutées dans cette unité.

Les applications (problèmes énoncés) étudiées en Mathématiques 33 doivent être relativement simples. Les problèmes ci-dessous s'approchent du niveau de difficulté maximum. Il est important que les élèves perçoivent une quelconque utilité de leurs efforts, mais pas au point de risquer de gâcher ce qui a été accompli en s'attaquant à des problèmes trop abstraits ou trop difficiles.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

L'une des meilleures façons de présenter cette section est de faire un problème avec lequel au moins quelques-uns des élèves se sentent familiers. Ces derniers comprendront ainsi la raison pour laquelle cette section fait partie du programme. Voici quelques suggestions de problèmes.

Problème : Henri Leroux entend construire une clôture autour d'un pâturage. À la quincaillerie, on offre un rabais incroyable sur le matériel dont il a besoin, mais ils n'ont plus que 300 m de fil barbelé en stock. Henri prévoit aussi délimiter un pâturage rectangulaire à l'intérieur du premier pâturage en construisant une autre clôture parallèle à deux de ses côtés. Quelles sont les dimensions requises pour clôturer la plus grande superficie possible ?

Réponse : Deux côtés mesurent 75 m et trois côtés mesurent 50 m.

Si ce problème ne semble pas trop intéressant, tentez de résoudre alors celui qui suit.

Problème : À l'école, une équipe organise un voyage au coût de 2 000 $ par personne si 100 personnes ou moins font partie de ce voyage. Une réduction de 16 $ sera accordée à chaque personne qui

se joindra au groupe lorsque celui-ci sera de 100 personnes. En fonction de quel nombre de voyageurs l'agence de voyages réalisera-t-elle le maximum de profit brut ?

Réponse : 112,5 personnes (112 ou 113 semble un peu plus réaliste) !

À ce stade, les élèves désireront peut-être essayer de résoudre ce problème à l'aide d'un graphique, d'essais systématiques, ou encore à l'aide d'un logiciel tableur. Toutes ces approches sont valables, bien qu'elles semblent indiquer la possibilité d'une solution algébrique qui sera discutée par la suite. Si jamais vous oubliez de revenir à ce problème, les élèves vous rappelleront sans doute à l'ordre.

Activité 1.2.1 : Une fois que les élèves connaissent bien les définitions du paramètre mentionné ci-dessus, demandez-leur de préparer un tableau avec des titres semblables à ceux-ci :

Équation | En haut - en bas | Large - étroit | Sommet | Équation de l'axe de symétrie | Image | Maximum-minimum.

Suggérez aux élèves de tracer le graphique de chacune des équations suivantes :

$y = ax^2$, $y = ax^2 + k$, $y = a(x - h)^2$, et enfin, $y = a(x - h)^2 + k$.

L'utilisation de la calculatrice et de l'ordinateur pour tracer les graphiques facilite le travail et le rend ainsi plus attrayant. Les élèves doivent étudier chacun des graphiques et écrire les observations pertinentes sous chaque titre. Ils doivent tirer leurs propres conclusions à mesure qu'ils progressent, car cela les guide. Cette activité correspond aussi très bien à certains sujets abordés à l'objectif 1.1.1. De plus, l'accent commence à être mis sur la méthodologie de la recherche scientifique. Comme il a été suggéré à la section précédente, le fait de demander aux élèves d'écrire leurs propres conclusions constitue une bonne façon de résumer les résultats obtenus.

Activité 1.1.1 : Soient :

A	**B**
$y = \frac{3}{5}x^2$	$y = 7x^2$
$y = -9x^2$	$y = -9(x - 2)^2$
$y = \frac{1}{2}x^2$	$y = \frac{1}{2}(x + 4)^2 + 5$

Demandez aux élèves de décrire, dans leurs mots, les changements survenus au graphique d'une fonction à mesure qu'il se déplace de la position A à la position B.

(Nous tenons à remercier S. Kizior, du Westwood Community High School.)

Il faut souligner ici l'importance de la partie de la recherche qui provient de l'élève, sous la direction de l'enseignant. Les élèves doivent formuler une hypothèse sur l'effet produit par une valeur en particulier sur le graphique, puis se servir de la technologie mise à leur disposition pour tracer ce graphique, ce qui les conduira par la suite à effectuer d'autres recherches. Des exercices comme ceux-ci se prêtent bien à des échanges mutuels de stratégies d'apprentissage, de même qu'à des présentations en classe.

Activité 1.2 : Demandez aux élèves d'écrire quelques équations sous la forme $y = a(x - h)^2 + k$, puis de les convertir à la forme $y = ax^2 + bx + c$. Il s'agit de tracer ensuite les graphiques des deux équations, puis de comparer les résultats. Demandez-leur d'expliquer pourquoi les résultats sont identiques. Cet exercice, de pair avec l'histoire mentionnée à la section « Remarques », permet de présenter la technique servant à compléter le carré.

Problème 1.2.2 : La vitesse d'une fusée miniature, lors de la mise à feu, est de 30 m/s. La formule $h = 30t - 4{,}9t^2$ donne la hauteur t secondes après la mise à feu. Quelle hauteur cette fusée atteint-elle ? Quelle est la durée de son parcours ?

Solution : Les élèves doivent être incités à exprimer en premier lieu l'équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$, puis à en tracer le graphique afin d'être en mesure de déterminer le sommet. Ils doivent constater que le temps d'observation maximum est une valeur de h et que le moment où la fusée atteint sa hauteur maximale est le premier nombre du sommet, la valeur de t. Ils doivent ensuite compléter le carré pour transcrire l'équation sous la forme $y = (a - h)^2 + k$, et enfin, comparer le sommet calculé approximativement (3,1, 45,9) avec celui observé lorsqu'ils ont tracé le graphique de la fonction. En répondant à la question : « Quelle est la durée du parcours ? », les élèves passent au concept suivant. Ceci, par conséquent, devient une activité qui permet d'établir des liens. Après avoir accepté l'idée que le sol représente la valeur 0 pour h, ils seront alors en mesure d'obtenir cette information d'après le graphique. L'utilisation de la fonction « trace » sur les calculatrices graphiques facilite ce travail de beaucoup. À ce stade, on laisse à l'enseignant le soin de déterminer si les élèves auront à employer de nombreuses techniques algébriques pour déterminer les zéros des fonctions quadratiques.

Ce problème permet aux élèves de mettre en pratique quelques-uns des concepts étudiés. Comme il a été mentionné, il sert aussi d'introduction à la section suivante. De surcroît, les élèves ont eu ainsi l'occasion de développer leurs propres méthodes de résolution de problèmes. Selon une approche expérimentale, ils ont étudié les propriétés d'une fonction quadratique, de même que le graphique correspondant, et ont tiré les conclusions qui s'imposaient. Ils ont vu la corrélation entre les méthodes par représentation graphique et les méthodes algébriques, en tentant de déterminer l'information requise. Ils ont aussi mis en pratique la théorie apprise et ont eu un aperçu de ce qu'ils apprendront plus tard, à la section suivante.

Avant d'entreprendre l'étude du prochain concept, n'oubliez-pas de retourner au problème figurant au début de cette unité. Habituellement, les élèves ne vous laisseront pas l'oublier. Ce problème termine bien cette section.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les calculatrices graphiques et les ordinateurs ont modifié les méthodes d'apprentissage de ce concept. Tracer des graphiques sur du papier graphique est plutôt fastidieux. Ainsi, lorsque les élèves ont l'impression d'avoir beaucoup de travail de ce genre à faire, ils sont nettement moins enthousiastes à l'idée d'une approche expérimentale. La technologie est agréable à utiliser et permet de travailler facilement avec des paramètres.

Le programme informatique interactif en langage BASIC « Recherche de racine » qui suit peut servir à déterminer approximativement la hauteur maximale atteinte.

```
10    INPUT PREMIER, DERNIER, MODIF
20    PRINT "T", "H"
30    PRINT "____", "____"
40    FOR T = PREMIER TO DERNIER STEP MODIF
50    LET H =30*T-4,9*T^2
60    PRINT T,H
70    NEXT T
80    END
```

Entrez la première et la dernière valeur de T, ainsi que la différentielle. Pour obtenir un meilleur résultat pour l'approximation de la hauteur, changez les valeurs des variables PREMIER, DERNIER et MODIF. La durée totale du parcours de la fusée est déterminée par l'équation $30t - 4{,}9t^2$. Cette équation peut être résolue par une mise en facteurs. On peut utiliser le programme en déterminant approximativement la valeur du temps, T, où H devient 0. Attirez l'attention sur le domaine dans lequel, de positif, H devient négatif.

Adapté d'après « Computer Lessons in Algebra », The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook of National Council of Teachers of Mathematics.

Ce problème se prête tout aussi bien à l'utilisation d'un logiciel tableur. En réalité, une grande part de l'expérimentation étudiée dans cette section peut être réalisée à l'aide d'un tableur. Le manuel de l'utilisateur ou la calculatrice Texas Instruments TI-81 possèdent une application intéressante appelée, « Solving an Equation ».

Pour obtenir un programme en langage BASIC et une gamme d'activités conçues dans le but d'aider les élèves à examiner les effets produits par a, b, et c dans l'équation générale, $y = ax^2 + bx + c$, ainsi qu'à analyser la relation entre le discriminant et le graphique de la parabole, reportez-vous à « Microcomputer Unit : Graphing Parabolas », Mathematics Teacher, décembre 1986.

Logiciels :
Master Grapher (Addison-Wesley)
Computer Graphing Experiments (Addison-Wesley)
Green Globs and Graphing Equations (Sunburst)

SUGGESTIONS DE MATIÈRE FACULTATIVE

En Mathématiques 13 et 23, les élèves ont appris à déterminer les coordonnées à l'origine sur des graphiques linéaires. Demandez-leur d'utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour tracer le graphique d'une équation donnée sous la forme $y = (x - h)^2 + k$, puis de trouver les coordonnées à l'origine à la fois d'après le graphique et d'après son équation. Ils n'ont pas nécessairement à appliquer les techniques de mise en facteurs d'équations quadratiques. Ils peuvent isoler x en soustrayant la valeur de k, en divisant par la valeur de a, en extrayant la racine carrée des deux côtés de l'équation, puis en additionnant la valeur de h. Cet exercice crée un lien entre le matériel étudié auparavant, ce qui est étudié présentement et la matière du prochain concept.

Problème : Le problème suivant a été présenté dans la section correspondante du guide d'enseignement de Mathématiques 20.

Déterminer l'équation dont les abscisses à l'origine sont 9 et 3, et une des ordonnées à l'origine est 18. La solution algébrique donnée dans le guide d'enseignement de Mathématiques 20 est peut-être un peu trop complexe pour l'élève moyen de Mathématiques 33; par contre, il est peut-être alors possible de s'attaquer à ce problème en utilisant un ordinateur ou une calculatrice graphique.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES	MS5, O2, T2	: pages 23 à 57 et 66 à 71
	BMS, 5A	: pages 5 à 7, 15 à 19, 23 à 28 et 32 à 36
	INF, M 534	: pages 87 à 99
	M 064-424	: pages 209 à 226

CONCEPT 2

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que trouver les abscisses à l'origine de la fonction quadratique $y = ax^2 + bx + c$ équivaut à résoudre l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.1 résoudre des équations quadratiques à l'aide de la formule quadratique;
- 2.1.1 déterminer les abscisses à l'origine de la fonction quadratique;
- 2.1.2 résoudre des problèmes portant sur des équations quadratiques;

2.2 identifier et expliquer la relation qui existe entre les abscisses à l'origine des fonctions quadratiques et les racines des équations correspondantes.

REMARQUES

En Mathématiques 23, les élèves ont appris à résoudre des équations quadratiques par la mise en facteurs. Dans la section précédente, la discussion portait sur la fonction quadratique et on a fait allusion à la relation qui existe entre le graphique de la fonction quadratique et la solution de l'équation correspondante. Nous entreprenons maintenant l'étude de ces relations. Une fois de plus, nous recommandons l'utilisation de la calculatrice graphique et de l'ordinateur.

Comme la résolution d'équations quadratiques effectuée en complétant le carré ne fait pas partie de nos objectifs, le développement d'une formule devrait donc être considéré comme une activité facultative. Il serait toutefois bon d'illustrer l'utilité de la formule ainsi que sa similarité, quant aux résultats obtenus, avec la méthode de la mise en facteurs. De même, il est conseillé de mettre largement l'accent sur l'utilité de cette formule pour résoudre des équations impossibles à mettre en facteurs. Lors du tracé des relations entre le graphique de la fonction et les racines de l'équation, il est suggéré d'indiquer aux élèves les équivalences décimales des solutions irrationnelles obtenues.

Les caractéristiques des graphiques des fonctions quadratiques dont les équations correspondantes n'admettent aucune solution devraient être illustrées graphiquement et algébriquement.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Activité 2.2 : L'enseignant peut demander aux élèves de tracer le graphique des fonctions d'après un exercice où les solutions des équations correspondantes peuvent être obtenues par une mise en facteurs. Les élèves peuvent étudier les relations entre les graphiques des fonctions, les racines des équations correspondantes ainsi que les abscisses à l'origine des graphiques. Ces relations peuvent être résumées sous la forme d'un tableau (voir ci-dessous) et, par la suite, les élèves peuvent écrire quelques-unes de leurs

propres conclusions. Cette activité peut aussi inclure quelques fonctions dont les racines ne peuvent être déterminées qu'à l'aide de la formule quadratique. Cet exercice peut devenir une excellente occasion pour les élèves de partager des méthodes d'apprentissage entre eux ou peut faire l'objet d'une présentation en classe.

Vous trouverez ci-dessous un exemple de tableau ainsi que quelques questions supplémentaires.

Fonctions	Équations	Solutions d'équations	Abscisses à l'origine
1. $y = x^2 - 8x + 12$			
2. $y = x^2 - 8x + 16$			
3. $y = x^2 - 8x + 14$			
4. $y = x^2 - 8x + 20$ (etc.)			

a. Quelle est la relation entre le nombre de coordonnées à l'origine et le nombre de solutions obtenues ?
b. Décrivez la relation entre le nombre d'abscisses à l'origine d'une fonction et le nombre de racines de l'équation correspondante.
c. Quel est le nombre de racines admises à la question 4 ?
d. Combien y a-t-il d'abscisses à l'origine à la question 4 ?
e. Décrivez la relation qui existe entre des fonctions quadratiques qui n'ont aucune abscisse à l'origine et les équations correspondantes qui n'admettent aucune solution.

Cette activité permet de faire le lien entre le concept précédent (les graphiques) et celui-ci (la résolution d'équations). Le fait, pour les élèves, de tirer leurs propres conclusions sur les caractéristiques de divers graphiques et sur les relations entre ces graphiques, les abscisses à l'origine et les racines des équations correspondantes, s'avère un exercice mental encore plus exigeant.

Problème 2.1 (reportez-vous au « problème de la fusée ») : La vitesse initiale d'une fusée miniature, lors de sa mise à feu, est de 30 m/s. La formule $h = 30t - 4{,}9t^2$ donne la hauteur de la fusée au-dessus du sol, t secondes après la mise à feu. Quelle est la durée du parcours de la fusée ?

Solution : Puisque la mise à feu se fait au sol et que la fusée revient ensuite au sol, sa hauteur à ce moment-là est zéro. Par conséquent, la formule $h = 30t - 4{,}9t^2$ devient l'équation $-4{,}9t^2 + 30t = 0$. Les solutions en sont $t = 0$ et $t = 6{,}1$

(approximativement). Ainsi, la fusée s'est retrouvée dans l'espace pour un total approximatif de 6,1 secondes. Demandez aux élèves de tracer le graphique de la fonction et d'explorer la section autour des abscisses à l'origine à l'aide de la fonction trace de la calculatrice.

Une fois l'exploration des similitudes des graphiques et des équations terminée, il s'agit de mettre l'accent sur les techniques de résolution d'équations quadratiques. Lorsque les élèves sembleront plus confiants en leurs capacités, tentez de résoudre des problèmes plus complexes comme celui qui suit.

Problème 2.1.1 : Soient deux nombres dont la somme est un. Lequel a la plus grande valeur : le plus petit nombre au carré additionné au plus grand ou le plus grand nombre au carré additionné au plus petit ? Pourquoi ?

Solution : Ils sont identiques, car $x^2 + (1 - x) = (1 - x)^2 + x$.

Tiré de delta k, avril 1989, page 52.

On peut également tenter de résoudre ce problème à l'aide d'un logiciel tableur, en traçant les graphiques des deux fonctions séparément, puis en les regroupant sur le même écran.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Les calculatrices et les logiciels servant à tracer des graphiques ont modifié de beaucoup la façon d'étudier ce concept.
Reportez-vous à MMW 4, page 84.

Pour obtenir un programme en langage BASIC et une gamme d'activités conçues dans le but d'aider les élèves à examiner les effets de a, b, et c dans l'équation générale, $y = ax^2 + bx + c$, ainsi qu'à analyser la relation entre le discriminant et le graphique de la parabole, reportez-vous à « Microcomputer Unit : Graphing Parabolas », Mathematics Teacher, décembre 1986.

Logiciel :
Factoring Algebraic Expressions (Mindscape), édition revue.

SUGGESTIONS DE MATIÈRE FACULTATIVE

Comme activité facultative, il est fortement recommandé d'étudier des questions comme celle de la « fusée miniature », qui démontre l'interdépendance de la fonction (sommet, valeurs maximales et minimales, etc.) et de l'équation (abscisses à l'origine, solutions).

Activité : Les élèves peuvent maintenant tenir compte de ceci : x - c est un facteur d'une fonction polynomiale, p(x), si et seulement si c'est une racine de p(x) = 0. Ce fait implique aussi que lorsque a/b est une racine de f(x) = 0, bx - a est alors un

facteur. L'approche suivante aide à confirmer le rapport entre la mise en facteurs et l'application de la formule quadratique.

Soit l'exemple suivant : effectuer la mise en facteurs de l'expression $30x^2 + 49x - 98$. Il faut résoudre l'équation $30x^2 + 49x - 98 = 0$ pour déterminer les facteurs de l'expression donnée.

Ainsi, $x = \frac{-49 \pm \sqrt{14\ 161}}{60} = \frac{-49 \pm 119}{60}$

En simplifiant pour déterminer x et en convertissant l'équation en une expression égale à zéro, on obtient :

$x = \frac{-14}{5}$	ou	$x = \frac{7}{6}$,
$5x = -14$		$6x = 7$,
$5x + 14 = 0$		$6x - 7 = 0$.

Par conséquent,

$$30x^2 + 49x - 98 = (5x + 14)(6x - 7).$$

Ceci confirme le rapport entre la résolution d'équations quadratiques et la mise en facteurs.

L'utilisation du discriminant, $b^2 - 4ac$, ne fait pas partie des objectifs de l'élève. L'étude du discriminant doit donc être considérée comme une activité facultative. Les élèves peuvent également effectuer des recherches supplémentaires, comme celles mentionnées à l'activité 2.2 et qui portent sur la comparaison des graphiques de diverses fonctions et leurs abscisses à l'origine.

APPROFONDISSEMENT DE L'ENSEIGNEMENT

Certains élèves peuvent choisir d'étudier les inégalités quadratiques. L'objectif premier devrait toutefois être la représentation graphique à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel approprié.

CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

MS5, 02, T2 : pages 13 à 22
BMS, 5A : pages 49 à 53
INF, M534 : pages 113 à 117
M 064-424 : pages 233 à 266

CONCEPT 2 (suite)

Les élèves devront être en mesure de démontrer qu'ils comprennent que trouver les abscisses à l'origine de la fonction quadratique $y = ax^2 + bx + c$ équivaut à résoudre l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$.

Les élèves devront être en mesure d'effectuer ce qui suit :

2.3 résoudre des équations formées d'expressions rationnelles et irrationnelles qui admettent, comme solutions, les racines d'équations quadratiques;

2.3.1 résoudre des problèmes comportant des équations formées d'expressions rationnelles et irrationnelles qui admettent, comme solutions, les racines d'équations quadratiques.

REMARQUES

Parmi les professeurs de mathématiques, le débat se poursuit au sujet de l'endroit où on devrait enseigner ce concept. Une des écoles de pensée affirme que ce dernier devrait se trouver dans l'unité à l'intérieur de laquelle il est mis en pratique. Autrement dit, lorsqu'il est question d'expressions rationnelles, on devrait retrouver celles-ci dans l'unité des expressions rationnelles, et les expressions irrationnelles devraient se retrouver dans l'unité correspondante. Cela serait une possibilité, étant donné que l'étude des équations quadratiques fondamentales fait partie du programme de Mathématiques 23. On peut toutefois invoquer que les questions portant sur des expressions rationnelles et irrationnelles représentent également des approfondissements ou des applications des équations quadratiques fondamentales et, de ce fait, pourraient ainsi faire partie de cette unité.

Le désavantage de la première approche est que l'étude doit alors se limiter aux questions qui conduisent à des équations quadratiques résolues par la mise en facteurs, étant donné que les élèves n'ont pas encore appris la formule quadratique. L'avantage est le rapport immédiat entre ce concept et son concept de base (soit entre les équations formées d'expressions rationnelles et les expressions rationnelles). Le désavantage de la deuxième approche est l'absence de rapport immédiat avec le concept de base. Elle offre, par contre, l'avantage d'une étude globale comprenant tous les types d'équations quadratiques qui peuvent ou non être mises en facteurs.

Pour tous ceux qui veulent ménager la chèvre et le chou, il existe une troisième solution. Celle-ci consiste à discuter des questions portant sur des expressions rationnelles ou irrationnelles dont les solutions ne comportent pas d'équations quadratiques dans les unités traitant des expressions rationnelles et irrationnelles. Dans cette unité, les questions dont les solutions impliquent des équations quadratiques peuvent donc être étudiées intégralement. Cela a

l'avantage de « recycler » et, partant, de confirmer le choix des approches quant à la résolution d'équations irrationnelles et d'équations formées d'expressions rationnelles étudiées antérieurement. Le désavantage est le temps requis pour établir de nouveau les techniques appliquées antérieurement et, puisque certaines parties d'un concept sont enseignées dans d'autres sections et à d'autres moments, le risque que les élèves aient une impression de fragmentation du programme.

Peu importe l'approche, les équations incluses dans cette section ne doivent pas être rendues trop complexes. L'accent doit être mis sur la démonstration de la mise en pratique du concept et non sur la résolution d'équations difficiles et complexes.

PROCESSUS ET CONTEXTE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 2.3 : Résoudre l'équation $\frac{x^2 + 12}{x + 3} = \frac{-7x}{x + 3}$

Réponse : La solution est -4. Le résultat de la multiplication des deux membres de l'équation par le facteur $x + 3$ mène à l'équation quadratique $x^2 + 7x + 12 = 0$ qui, à son tour, détermine que -4 et -3 sont des valeurs de x. Cependant, -3 n'est pas une valeur acceptable et n'est donc pas une racine.

L'importance de ce type de question consiste à prouver que l'une des solutions est étrangère, car elle entre en conflit avec la valeur non acceptable ($x \neq 3$) qui, à son tour, renforce le concept de valeurs non acceptables. Le problème suivant montre à l'élève que les problèmes qui semblent a priori faciles à résoudre ne le sont pas toujours.

Avant d'entreprendre la résolution de ce problème (ou de toute équation), il serait judicieux d'explorer l'utilisation de la calculatrice graphique et de l'ordinateur. Si les élèves tracent le graphique de la fonction $y = \frac{x^2 + 12}{x + 3}$ du côté gauche de l'écran et que, sur le côté droit, ils tracent le graphique de $y = \frac{-7x}{x + 3}$, ces graphiques sembleront se couper au point où $x = -4$.

En raison de la difficulté de voir l'intersection, demandez-leur de transcrire l'équation sous la forme $\frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} = 0$, puis de tracer le graphique sous la forme de fonction $y = \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3}$.

Ils constateront ainsi que le graphique est une droite dont l'équation est $y = x + 4$, ce qui est exactement ce qu'ils auraient obtenu s'ils avaient simplifié le membre droit de l'équation dont ils ont tracé le graphique. De plus, ils doivent remarquer que l'abscisse à l'origine

est de nouveau -4, qui est la solution du problème. Demandez aux élèves d'expérimenter cette approche avec quelques-uns des problèmes ci-dessous ou avec des problèmes déjà étudiés.

Problème 2.3 : Résoudre l'équation : $x - 4 = \frac{-1}{x}$.

Réponse : $x = 2 \pm \sqrt{3}$

Problème 2.3 : Résoudre l'équation : $x - 3 = \sqrt{5 - x}$.

Réponse : $x = 4$

Nous soulignons, une fois de plus, que l'importance de cette équation réside dans le fait qu'elle confirme l'idée que les solutions des équations irrationnelles doivent être vérifiées afin de déterminer si elles sont pertinentes.

Comme illustré antérieurement, la calculatrice graphique et l'ordinateur peuvent faciliter la résolution de problèmes en identifiant des solutions possibles (les abscisses à l'origine des fonctions).

Pour obtenir des suggestions de problèmes, reportez-vous à Problem Solving in Mathematics : Focus for the Future, page 69, N°25; page 68, N°16; page 66, N°14; page 62, N°8.

UTILISATION DE LA TECHNOLOGIE

Reportez-vous à HM11, page 62, « Computer Application : the Golden Ratio ».

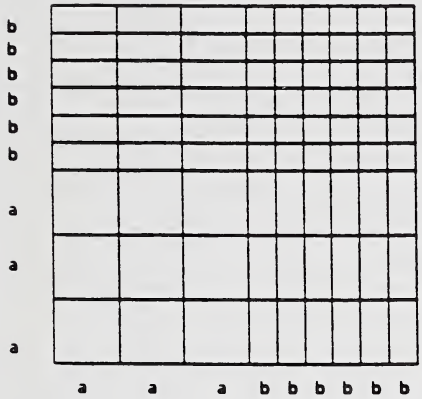
SUGGESTIONS DE MATIÈRE FACULTATIVE

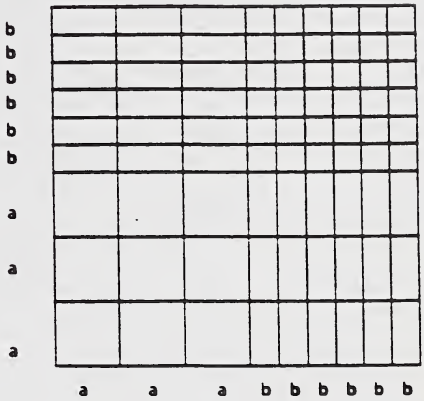
Les enseignants doivent consulter le guide du maître de Mathématiques 20, tout en s'assurant que le niveau de difficulté des problèmes corresponde aux objectifs de Mathématiques 33.

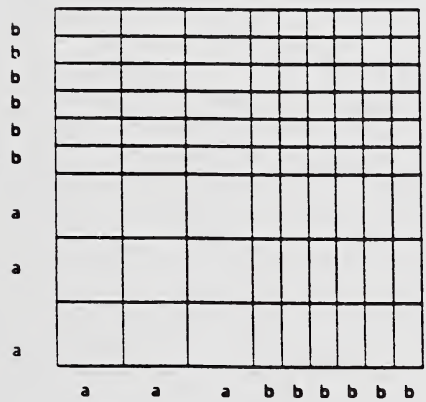
CORRÉLATION ENTRE LES RESSOURCES ET LE PROGRAMME D'ÉTUDES

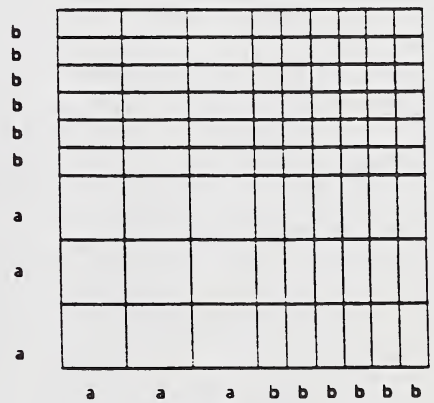
ANNEXE A

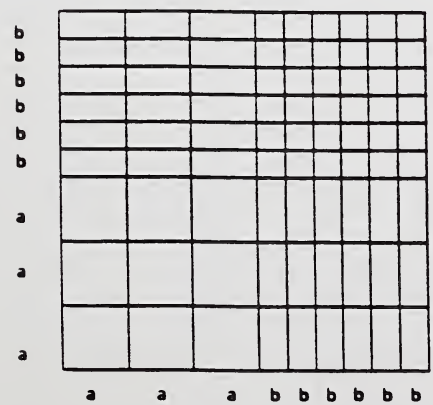
EXEMPLES DE QUADRILLÉS POUR BINOMIAUX

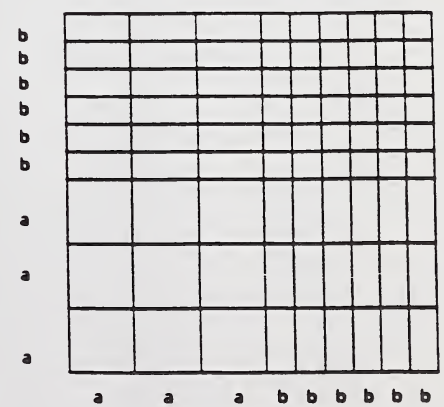




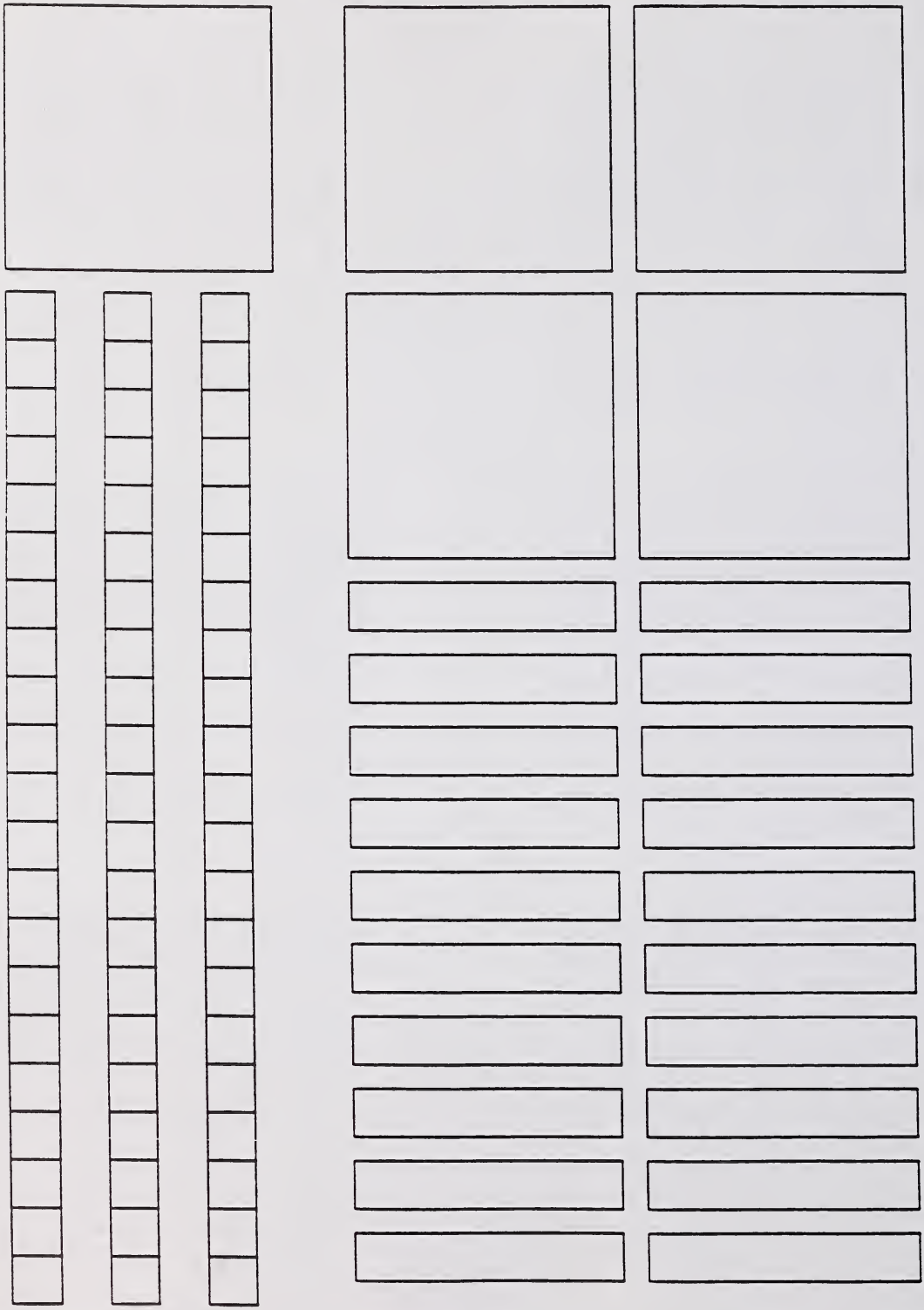








EXEMPLES DE TUILES ALGÉBRIQUES



ANNEXE B

EXEMPLES DE SUGGESTION D'ÉVALUATION

Évaluation de la résolution de problèmes

Cote	Excellent (5)	Très bon (4)	Bon (3)	Passable (2)	Médiocre (1)
Catégorie					
Comprend le problème	Compréhension parfaite du problème	Compréhension du problème presque complète	Compréhension partielle du problème	Compréhension limitée du problème	Aucune compréhension du problème
Développe un plan pour résoudre le problème	Plan menant à une solution logique	Plan satisfaisant en majeure partie mais demandant des révisions	Plan en partie correct à partir d'une compréhension incomplète du problème	Tentative limitée de développement de plan	Aucune tentative de développement de plan; impossibilité d'en arriver à une solution logique
Arrive à une solution	Solution logique au problème : réponse appropriée	Solution correcte en majeure partie; erreurs minimes	Réponse partiellement erronée résultant directement d'erreurs dans le plan	Erreur majeure dans la solution	Aucune réponse donnée; solution illogique
Évalue la solution	Évaluation correcte de la solution à partir de l'information disponible	Évaluation presque complète et correcte	Bonne tentative d'évaluation de la solution et d'utilisation des informations recueillies	Tentative limitée d'évaluation de la solution ou d'utilisation des informations recueillies	Aucune tentative d'évaluation de la solution ou d'utilisation des informations recueillies

Note : Élève exempté -
Absence non justifiée - cote 0
Travail non exécuté ou non remis - cote 0

Module de sciences : Guide du maître
© 1989 Globe/Modern Curriculum Press. Permission de reproduire pour utilisation en classe. Tous droits réservés.

Tableau de contrôle

Élève : **Date :**

___ 1. Aime résoudre des problèmes
___ 2. Travaille bien en équipe
___ 3. Apporte des idées à la résolution de problèmes en groupe
___ 4. Persévère dans la solution d'un problème
___ 5. Tente de comprendre la nature du problème
___ 6. Manipule bien les données dans la résolution de problèmes
___ 7. Réfléchit aux bonnes stratégies à adopter
___ 8. Expérimente avec souplesse toute stratégie nécessaire
___ 9. Vérifie l'exactitude des résultats
___ 10. Peut décrire ou analyser les résultats - arrive à une conclusion ou décision appropriée

Échelle de cote

Élève : **Date :** _____

		Fréquemment	Parfois	Jamais
1.	Choisit les stratégies de solution appropriées	_____	_____	_____
2.	Applique correctement les stratégies de solution	_____	_____	_____
3.	En cas d'impasse, expérimente une autre stratégie (sans l'aide de l'enseignant)	_____	_____	_____
4.	Aborde les problèmes d'une manière systématique (éclaircit la question, identifie l'information nécessaire, planifie, résout et vérifie)	_____	_____	_____
5.	Démontre une volonté d'expérimenter les problèmes	_____	_____	_____
6.	Fait preuve de confiance en lui-même	_____	_____	_____
7.	Persévère dans ses tentatives de résolution de problèmes	_____	_____	_____

Reproduit, avec permission, de How to Evaluate Progress in Problem Solving, National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

	Élève 1	Élève 2	Élève 3	Élève 4	Élève 5
Date : Nom Action observée					
Confiance : Pose des questions					
Est convaincu qu'on peut trouver les réponses					
Aide les autres à résoudre leurs problèmes					
Autre - Note :					
Ouverture d'esprit : Résout les problèmes de plus d'une façon					
Change d'opinion devant un argument convaincant					
Autre - Note :					

Reproduit, avec permission, de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

QUELQUES DONNÉES D'AUTO-ÉVALUATION POUR LES ÉLÈVES

Échelle de cote

Les questions suivantes vous aideront à faire le point et à décrire votre réflexion dans un travail de résolution de problèmes (ou dans une recherche, un devoir, un projet).

1. Devant ce problème, comment avez-vous réagi ? Quelles ont été vos pensées ?

2. Avez-vous eu recours à des stratégies de résolution de problèmes ? Lesquelles ? Comment ont-elles fonctionné ?

3. Avez-vous eu à abandonner une première approche inefficace et à en essayer une autre ? Comment avez-vous réagi face à cela ?

4. Avez-vous terminé le travail (recherche, projet) ? Que pensez-vous de cela ?

5. Avez-vous vérifié si votre travail satisfaisait aux exigences précisées ? Étiez-vous convaincu qu'il était correct (satisfaisant) ?

Reproduit, avec permission, de How to Evaluate Problem Solving, National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

ÉCHELLE D'ÉVALUATION

7. EXCELLENT

- contenu : les idées, l'organisation et le développement attirent l'attention et le respect
- style exceptionnel découlant du choix de mots, du traitement et de la structure des phrases
- aptitudes techniques justes et efficaces par rapport au propos
- orthographe impeccable

6. TRÈS BON

- contenu : la plupart des idées sont correctes; bien organisé et développé
- choix de mots et structure de phrases clairs et efficaces; traitement adéquat
- aptitudes techniques relativement sans erreur par rapport au propos
- orthographe presque impeccable

5. BON

- contenu : plusieurs idées correctes; problèmes d'organisation et de développement
- problèmes mineurs de choix de mots ou de structure de phrases, ou les deux
- erreurs techniques fréquentes
- quelques fautes d'orthographe

4. PASSABLE

- contenu : quelques idées correctes; organisation inadéquate du développement
- plusieurs lacunes dans le choix de mots ou dans la structure de phrases, ou les deux
- plusieurs erreurs techniques dénotant de la distraction
- fautes d'orthographe nombreuses et dénotant de la distraction

3. MÉDIOCRE

- contenu : nombre d'idées insuffisant; développement inadéquat et désorganisé
- plusieurs lacunes quant au choix de mots ou à la structure de phrases, ou les deux
- plusieurs erreurs techniques dénotant de la distraction
- fautes d'orthographe nombreuses et dénotant de la distraction

2. DÉFAUTS GRAVES

- contenu : manque d'idées, ou d'organisation et/ou de développement
- sérieux problèmes de choix de mots ou de traitement ou de structure de phrases, ou tout cela à la fois
- erreurs techniques abondantes
- fautes d'orthographe abondantes

1. DONNÉES INSUFFISANTES OU HORS SUJET

Élaboré par le Program Evaluation and Language Arts Team du Calgary Board of Education.

Suggestions de lecture :

Board of Education for the City of Etobicoke (1987), Making the Grade : Evaluating Student Progress, Prentice-Hall Canada Inc., Scarborough, Ontario.

Joint Mathematical Board Shell Centre for Mathematical Education (aucune date), Problems with Patterns and Numbers : An O-level Module.

National Council of Teachers of Mathematics (1988), How to Evaluate Progress in Problem Solving, Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (1989), Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA.

ANNEXE C

EMPLOI DE L'ÉCRIT DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

C.L. Nahrgang et B.T. Petersen

L'écrit a sa place dans la classe de mathématiques. Il permet un mode de communication nouveau et intéressant entre les élèves et l'enseignant, tel que décrit par Watson (1980) :

Cet échange se révèle bénéfique pour la classe. Les élèves se rendent compte que je les écoute et les comprends. Ils semblent avoir réfléchit et trouvé en eux-mêmes les ressources nécessaires à la résolution des problèmes mathématiques. Beaucoup ont amélioré leurs notes.

Les devoirs écrits dans le cadre des cours de mathématiques permettent aussi aux élèves d'organiser leurs idées et, en même temps, d'améliorer leur aptitude à écrire (Johnson 1983).

Le but de cet article est de démontrer qu'on peut utiliser l'écrit dans les mathématiques pour enrichir l'enseignement. L'acte d'écrire donne aux élèves l'occasion de formuler, d'organiser, d'assimiler et d'évaluer des concepts. Emig, qui a effectué des recherches poussées sur les processus de réflexion associés à l'écrit, propose que l'écrit « représente un moyen privilégié d'apprentissage - non seulement précieux, non seulement spécial, mais aussi unique » (Emig 1977). La psychologie cognitive a aussi reconnu le pouvoir de l'écrit en tant qu'outil d'apprentissage. Bruner, par exemple (1966), a déclaré que « plus nous découvrons la manière par laquelle il (l'écrit) peut assister la réflexion...[plus cela] me pousse à placer le langage au centre de nos préoccupations sur la nature du développement intellectuel ».

Notre expérience révèle que la méthode la plus efficace d'utilisation de l'écriture comme apprentissage des mathématiques passe par la tenue d'un journal. Ces exercices d'écriture en classe permettent aux élèves d'effectuer un travail informel et personnel sur les concepts mathématiques, dans leurs propres mots et à partir d'expériences vécues. Ils peuvent jouer avec une variété de concepts sans craindre l'évaluation formelle de leurs écrits ou de leurs aptitudes mathématiques. Notre expérience, qui va de l'algèbre au calcul mathématique avec des groupes de niveau collégial, nous prouve que ces exercices d'écriture courts mais efficaces enrichissent l'apprentissage. Le journal dépasse l'étude « par coeur » et pousse les élèves à utiliser leurs aptitudes intellectuelles. Myers rapproche ainsi l'écriture de l'apprentissage individuel : « Par l'accomplissement de cette tâche simple (l'écriture), on oblige les élèves à faire des liens entre l'information provenant de la lecture et les connaissances acquises, ainsi qu'à effectuer l'organisation et la synthèse de cette information de manière à se l'approprier » (Myers 1984).

Le journal

Le journal est une série d'exercices d'écriture personnelle. Chaque exercice (ou entrée) constitue une courte réponse écrite à une question, une déclaration ou une série d'instructions du professeur. Chaque réponse est formulée en prose plutôt que dans le style mathématique habituel de nombres et d'équations. On demande aux élèves d'utiliser un style d'écriture expressive pour que leurs réponses soient spontanées et expriment toutes leurs idées. La figure 1 donne un exemple d'une entrée en écriture technique faite par un élève en réponse à l'exercice suivant : « Décrivez une analogie réaliste non mathématique à la règle $a^{-n} = 1/a^n$ ».

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1986,
National Council of Teachers of Mathematics.

Ces journaux répondent à deux besoins de base. Premièrement, ils permettent aux élèves de procéder à leur propre rythme et d'en arriver à une compréhension des concepts mathématiques à partir de leurs expériences personnelles. Deuxièmement, ils constituent pour les enseignants un outil de diagnostic incomparable; les écrits des élèves révèlent les zones de confusion et exposent les incompréhensions des concepts mathématiques.

Nous avons introduit assez facilement la rédaction d'un journal dans notre cours de mathématiques au Michigan Tech. Ce cours couvrait une période de 10 semaines. Auparavant, ce cours comportait environ 10 tests-surprises comptant pour 20 pour cent des notes finales des élèves. En remplaçant ces tests par des sessions de rédaction de journal, nous avons permis aux élèves d'effectuer deux entrées par semaine dans leur journal. Ainsi, la souplesse de ce procédé (un de ses avantages) libérait plus de temps pour permettre au professeur de se consacrer aux exercices portant sur les concepts mathématiques plus difficiles.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *est une règle inverse; donc, si une puissance est élevée à la négative, elle devient une fraction, ce qui la rend positive.*

On inverse ce qu'elle énonce, on la retourne.

Dans la vie, qu'est-ce qu'on peut inverser ou retourner (ce qui veut dire la même chose) ?

Qu'est-ce qu'on peut retourner dans la vie - et pourtant le garder tel quel, la signification demeurant la même (tout en n'étant pas mathématique) ?

- *les relations avec les gens*
- *les sentiments*
- *la communication, la façon de dire ou de communiquer quelque chose*

La communication et la langue française permettent d'appliquer facilement cette règle. On peut changer ou retourner les phrases tout en conservant la même signification.

Figure 1

La plupart de ces entrées de journal requièrent de trois à sept minutes, selon le type d'exercice. Notre expérience a montré qu'à mesure que les élèves s'habituent au procédé, plus leurs réponses deviennent mieux organisées et donc plus faciles à lire. Dans toutes les classes, cette expérience des élèves dans la rédaction de journal les a conduits à des améliorations marquées de leur faculté d'organisation de leurs réponses.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1986,
National Council of Teachers of Mathematics.

La méthode d'évaluation du journal prend beaucoup d'importance. Au départ, la meilleure approche semblait être de noter chaque journal, la moyenne de toutes les notes du journal s'intégrant à la note finale du cours. Nous nous sommes rapidement rendu compte que cette méthode restreignait le potentiel de cet outil d'apprentissage. En notant les entrées, nous dirigions indirectement la manière d'aborder les concepts, ce qui enlevait à la rédaction de journal deux de ses plus importantes qualités, l'apprentissage individuel et la découverte. Malgré tout, nous devions accorder un certain crédit aux élèves pour leur contribution. Après l'étude de plusieurs possibilités, nous avons choisi d'allouer un ou deux points applicables au prochain examen majeur, sur la base des remarques des élèves sur les concepts, de la façon suivante : accorder le maximum de points supplémentaires aux réponses les mieux adaptées et ne donner aucun point aux élèves n'ayant pas fait d'efforts. De plus, nous ajoutions souvent des remarques appropriées comme « excellent », « bon », « incomplet » ou « à réviser ». Les élèves appréciaient les remarques des professeurs autant que les points supplémentaires alloués. Ce qui a conduit à la correction de toutes les erreurs mathématiques. Nous avons donc ainsi porté à l'attention des élèves ces erreurs, même si elles n'étaient pas d'une importance primordiale.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1986,
National Council of Teachers of Mathematics.

Analyse

Les entrées de journal explicitent les activités d'apprentissage individuel. Les différents types d'exercices élaborés correspondaient en général aux niveaux décrits dans la taxonomie de Bloom (Bloom, Hastings et Madaus, 1971). Dans une section sur la factorisation, on demandait aux élèves de faire l'exercice de journal suivant : « Commentez la déclaration suivante : "La factorisation et la recherche d'un produit sont des processus contraires". » Le but poursuivi par cet exercice consistait à amener les élèves à rassembler des idées, à assimiler le concept de la factorisation et à analyser sa signification dans la recherche d'un produit. On assignait cette tâche durant la période initiale d'étude de la factorisation et de la recherche des produits des polynômes. Il est intéressant d'observer la manière dont chacun des élèves suivants aborde la compréhension du processus de la factorisation en rapport avec son cadre de référence personnel. Réponse de l'élève A :

La factorisation et la recherche d'un produit sont des processus contraires. Ils aboutissent à des processus contraires, mais la manière de les traiter n'est pas inverse parce que le contraire de la multiplication est la division. Les équations sont toutefois interchangeables et peuvent être appelées.

À prime abord, cette réponse semble inintelligible. On note cependant la tentative de l'élève d'associer la multiplication et la division à la recherche d'un produit et à la factorisation. Ce lien est important, car il fournit à l'élève une approche des concepts courants de la multiplication et de la division.

Même dans la réponse de l'élève B, élève de niveau passable, on observe la valeur cognitive de l'écrit :

La factorisation et la recherche d'un produit sont des processus contraires. Je suppose que la factorisation facilite la recherche de la réponse. Je ne suis vraiment pas sûr de l'aide qu'elle apporte, car je ne lui trouve pas une grande utilité. Je crois qu'elle sert à poser le problème en termes plus simples.

D'abord, l'élève reformule l'exercice, puis procède à une évaluation de base correcte. On voit toute l'importance de la réponse de l'élève dans la dernière phrase. L'élève y découvre l'un des principaux buts de la factorisation : simplifier une expression pour faciliter son utilisation dans les opérations subséquentes.

L'élève C montre une compréhension du fonctionnement des deux processus, mais passe à côté du concept et du but de la factorisation.

Je crois que la factorisation et la recherche d'un produit sont des processus contraires. Le produit de deux binômes résulte d'une multiplication :

$(x + 2)(2x - 1) = 2x^2 + 3x - 2$
La factorisation d'un trinôme donne deux binômes :
$2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1986,
National Council of Teachers of Mathematics.

Cette réponse illustre une des difficultés de l'évaluation des réponses. Plus on retrouve d'équations et de mathématiques dans une réponse, moins on en sait sur la compréhension d'un concept par l'élève. C'est pourquoi on encourage les élèves à répondre dans leurs propres mots plutôt qu'avec des équations.

Dans l'exemple suivant, on note que l'élève D rassemble des idées sur la recherche d'un produit et la factorisation, puis, dans une troisième phrase, arrive à une conclusion satisfaisante en tentant de répondre à ses propres questions.

La combinaison des facteurs pour trouver un produit est une application de l'algèbre qui permet de combiner les facteurs en monômes, polynômes, trinômes ou autres. La factorisation est le processus qui consiste à prendre des monômes, polynômes, binômes, trinômes ou autres et de les réduire aux termes qui, multipliés ensemble, les ont formés. Ainsi, la factorisation dissèque les polynômes, alors que la recherche du produit les rassemble. En fait, les deux sont très similaires dans leurs procédés. L'un recourt principalement à la multiplication, l'autre à la division.

L'élève rassemble, assimile, et finalement, évalue. Pour l'élève, le journal représente une progression vers la compréhension d'un concept. Pour le professeur, le journal demeure une trace écrite de la réflexion de l'élève et, par là même, un excellent outil de diagnostic.

Dans le même exercice, certains élèves se concentrent sur l'isolation d'un facteur commun. Dans la méthode de la factorisation, les élèves confondent parfois la division avec l'isolation d'un facteur commun. Ils ne comprennent pas le principe selon lequel la division est en fait incluse dans le procédé d'isolation d'un facteur commun. Les réponses des élèves E et F, respectivement, démontrent l'aptitude et l'incapacité des élèves à reconnaître cette différence :

La factorisation revient à diviser ($3x^2 + 6x$); lorsqu'on factorise $3x$, on obtient $3x(x + 2)$. Pour multiplier $3x(x + 2)$, on fait le contraire et on obtient de nouveau $3x^2 + 6x$. Ainsi, la recherche d'un produit et la factorisation sont la même chose, mais à l'opposé.

Lorsqu'on factorise, on supprime tous les facteurs communs d'une équation. Ceci est généralement accompli en divisant toute l'équation. Ensuite, pour revenir à l'équation originale à partir de l'équation factorisée, on doit multiplier l'équation factorisée par les nombres et la variable, etc., supprimés. Ceci montre que la factorisation et la recherche d'un produit...

L'élève E ne sépare pas aussi bien les deux principes que l'élève F. Dans la deuxième phrase, l'élève E comprend clairement que la division fait partie du procédé de l'isolation du facteur commun.

Un exercice subséquent du même cours demandait aux élèves de transposer le concept de recherche d'un produit et de factorisation en un événement non mathématique. La déclaration était la suivante : « Proposez une relation non mathématique analogue au processus de recherche d'un produit et de factorisation. » L'élève G a fourni une des meilleurs réponses :

Une relation similaire à la recherche d'un produit par rapport à la factorisation est celle du démontage d'un carburateur et de son remontage. Lorsque le carburateur est assemblé, il est difficile à nettoyer et à réparer. Donc, on le démonte pour faciliter ces tâches. Ceci est analogue

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1986,
National Council of Teachers of Mathematics.

à la factorisation. Lorsque les pièces du carburateur sont en ordre de fonctionnement, on doit les remettre ensemble pour qu'elles puissent fonctionner comme prévu. Ceci est analogue à la recherche d'un produit.

Cet exercice de journal diffère des autres devoirs par la nécessité pour les élèves de comparer les principes appris en classe avec des expériences non mathématiques. La réponse de l'élève G montre une compréhension globale de la factorisation et de la recherche d'un produit, en comparant ces processus au démontage et au remontage d'un carburateur. Il comprend la relation entre chaque processus et peut relier les deux. Cette analogie illustre aussi que les formes de la factorisation et les produits ont des utilisations mathématiques différentes. Dans cet exercice, l'élève devait rassembler de l'information à partir d'expériences mathématiques et non mathématiques, puis les associer logiquement. Cet exemple prouve que dans un court journal, l'élève peut utiliser une variété d'aptitudes intellectuelles, comme la synthèse, l'interprétation, la transposition, l'analyse et l'évaluation. Nous croyons que l'utilisation continue de ces aptitudes amènera l'élève à développer une compréhension des concepts mathématiques et une habileté à exprimer cette compréhension.

Conclusion

Nous avons adapté la technique de rédaction de journal à l'enseignement des mathématiques en classe. Nous avons tenté de promouvoir une meilleure assimilation des concepts mathématiques et de voir comment la rédaction d'un journal pouvait s'intégrer à ces cours. Cette étude a pris en compte les résultats des tests des élèves, leur attitude et leur écrit (cette dernière à l'aide du *Writing Apprehension Test*), de même que les évaluations des élèves et des enseignants. Les données n'ont établi aucune relation ferme entre les différents attributs considérés. Un examen des journaux a toutefois clairement indiqué qu'ils sont utilisés par les élèves pour réfléchir à la résolution de problèmes associés aux concepts mathématiques. De plus, les réponses de la plupart des élèves à un questionnaire indiquent qu'ils jugent très valable l'apport du journal aux cours de mathématiques.

On doit considérer et appliquer prudemment toutes les conclusions provenant de cette étude, car elles découlent d'un cas isolé particulier. L'étude a mené à des conclusions risquées et a produit plus de questions qu'elle n'en a résolues. Notre équipe de recherche espère que ce travail sera considéré comme une « première étape » plutôt que comme un « point final » et que la recherche à venir établira des relations plus définitives entre l'écriture et les mathématiques.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1986,
National Council of Teachers of Mathematics.

Bibliographie

Bloom, Benjamin S., J. Thomas Hastings et George Madaus, *Handbook on Formulative and Summative Evaluation of Student Learning*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1971.

Bruner, Jerome, *Toward a Theory of Instruction*, Cambridge, Harvard University Press, 1966.

Burmeister, Lou, *Reading Strategies for Middle and Secondary Teachers*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., 1978.

Burton, Grace M., « Writing as a Way of Knowing in a Mathematics Education Class », *Arithmetic Teacher*, N° 33, décembre 1985, pages 40 à 45.

Emig, Janet, « Writing as a Mode of Learning », *College Composition and Communication*, N° 28, mai 1977, pages 122 à 128.

Johnson, Marvin, « Writing in Mathematics Class : A Valuable Tool for Learning », *Mathematics Teacher*, N° 76, février 1983, pages 117 à 119.

Myers, John, *Writing to Learn across the Curriculum*, Bloomington, Ind., Phi Delta Kappa Educational Foundation, 1984.

Selfe, Cynthia, Bruce Petersen et Cynthia L. Nahrgang, « Studying the Effects of Journal Writing on Students in a College-Level Mathematics Course », dans *Writing in the Disciplines - Research into Practice*, Upper Montclair, N.J., Boynton/Cook, à paraître.

Watson, Margaret, « Sharing Teaching Ideas : Writing Has a Place in a Mathematics Class », *Mathematics Teacher*, N° 73, octobre 1980, pages 518 et 519.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1986,
National Council of Teachers of Mathematics.

ÉCRITURE EXPLORATOIRE ET APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

S.Z. Keith

De courts projets de rédaction exploratoire peuvent transformer la classe de mathématiques en un laboratoire dynamique et fort intéressant. En écriture exploratoire, les élèves examinent leurs connaissances sur un sujet en les notant par écrit dans leurs propres mots. Puis, afin de pousser leurs idées plus loin, ils partagent leurs réactions avec les autres élèves et l'enseignant. En dépit des avantages marqués de ces projets de rédaction, il se peut que l'enseignant ne soit pas à l'aise dans cet environnement interactif, car il doit concevoir les projets et déterminer que faire des résultats obtenus. Le présent article illustre de quelle façon les projets de rédaction peuvent aider à exposer et à identifier les problèmes d'apprentissage et offrir des projets permettant de s'attaquer à ces difficultés. Dans cet article, certaines techniques que je considère utiles pour traiter les résultats sont brièvement mentionnées; les avantages de ce type de projet sont également précisés.

Comment les projets de rédaction exposent les problèmes d'apprentissage

Je me sers de projets de rédaction fréquemment dans le cadre de mes cours avec les élèves de tous les niveaux. Dans une classe de trigonométrie, un projet type avait pour objectif premier de traiter des difficultés qu'éprouvaient de nombreux élèves à passer de la représentation à la verbalisation. La question était la suivante : « Qu'est-ce qu'un angle de référence ? » La figure 1 ci-dessous donne une illustration et une définition adéquate de ce concept.

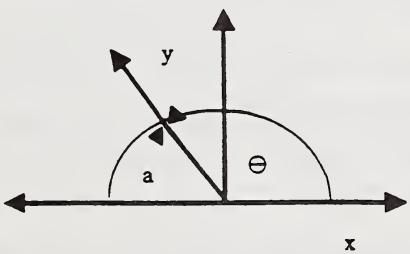


Figure 1 Une illustration et une définition adéquate d'un angle de référence.

DÉFINITION : Un angle de référence d'un angle θ *donné est un angle aigu x qui est formé par l'axe des x et le côté terminal de* θ *(x est un angle de référence pour l'angle* θ*).*

Quoique tous les élèves étaient en mesure de calculer les angles de référence, seulement quelques-uns pouvaient définir le terme de façon satisfaisante. Les problèmes des élèves étaient regroupés en trois catégories :

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

1. Certains élèves ont simplement donné un exemple (ce qui est, bien sûr, un point de départ) :
   - si vous avez, par exemple, 400 degrés sur le cercle unitaire, l'angle de référence serait de 40 degrés.

2. D'autres tentaient avec peine d'arriver à une certaine précision ou n'ont pu reconnaître les conditions de nécessité et de contenu exigées par la définition :

   - Un autre angle qui est le même que le premier angle, mais en des termes plus simples.

   (Les mots *même*, *premier* et *plus simples* sont vagues et la nature des « termes plus simples » constitue l'essence même de cette définition.)

   - L'angle aigu avec le même côté terminal.

   - Un angle situé plus près de l'axe des x que l'angle original.

3. Certains ont tenté de le définir simplement en indiquant de quelle façon la construction est utilisée :

   - L'angle qui doit être supplémentaire à l'angle donné qui indique dans quel quadrant il se trouve.

   - L'angle qui facilite le calcul des fonctions trigonométriques du premier angle.

4. Dans de nombreux cas, les élèves se sont montrés vagues ou ont dit tout ce qu'ils pouvaient, avec l'objectif d'en obtenir le crédit dans le cadre d'un devoir ou d'un examen :

   - Un angle pour lequel des mesures de moins de 90° ne sont effectuées que par rapport à l'axe des x. L'angle est plus petit que l'angle original et possède des fonctions trigonométriques équivalentes, comme 30°, 60°, etc.

5. De façon surprenante, très peu d'élèves ont réalisé des dessins et, lorsque c'était le cas, les dessins n'étaient pas identifiés ni ne portaient aucune référence. Même si le dessin ne fait pas normalement partie d'une définition écrite, il est beaucoup plus facile pour les élèves de discuter d'un concept, ou d'écrire sur celui-ci, s'ils ont appris à réaliser un dessin précis en premier lieu. La plupart des élèves saisissent d'abord un concept visuellement ou tactiquement plutôt que verbalement.

Un autre type de problème que rencontrent les élèves se situe dans l'emploi des conventions de notation. Le fait de demander aux élèves de définir un polynôme sur les nombres réels a produit des résultats surprenants, même dans les classes de mathématiques de niveau avancé :

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

- Un polynôme est $ax^2 + bx + c$.

  (Il ne s'agit là que d'un polynôme du deuxième degré. Cet élève ne s'est sans doute jamais rendu compte de l'utilité de la notation a_1, a_2, ...).

- f(x) est un polynôme sur les nombres réels si $f(x) = a^1_x + a^2_x + ...$

  (Cet élève se souvient seulement que certaines notations s'écrivent « en haut » et d'autres « en bas ».)

Souvent, les élèves partent du fait que le lecteur connaît déjà la réponse et qu'une explication ou une analyse serait ainsi superflue. Le projet de décrire la procédure servant à calculer le déterminant d'une matrice de $x \times 3$ a produit les réponses suivantes :

- Prenez la position à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 1 et multipliez-la par le déterminant de la matrice de 2×2 ...

- N'utilisez pas le développement entier, utilisez des cofacteurs, ce qui indique quel signe nous lui donnons. Un plus ou un moins fois le mineur.

La situation devient plus confuse lorsqu'il ne s'agit pas simplement d'énoncer une définition ou un algorithme, mais de rédiger une preuve. Le problème qui se pose alors est le manque de compréhension des élèves de ce qui constitue une preuve. Les exemples qui suivent proviennent d'un cours d'algèbre abstrait de niveau supérieur :

- Question : Prouvez que si H et K sont des sous-groupes normaux d'un groupe G, H, K est un sous-groupe normal de G.

Réponse : Puisque H et K sont des sous-groupes, H K est normal d'après un théorème.

- Question : Prouvez que 1cm (m, n) = mn/gcd (m, n).

Réponse : On doit avoir 1cm (m, n) - mn/gcd (m, n), parce que nous supposons que cela n'est pas vrai. Mais il ne peut en être ainsi, car nous savons que 1cm (m, n) = mn/gcd(m, n). Par conséquent, l'affirmation est vraie.

Dans l'enseignement collégial, une bonne partie des énergies est consacrée à enseigner aux élèves avancés comment établir une preuve (comment réaliser une preuve et déterminer si une preuve est possible dans certaines situations). Les élèves en algèbre dont le travail est cité ci-dessous ne sont peut-être pas de niveau supérieur; ils n'ont atteint ce niveau que par la maîtrise de problèmes examinés à fond. Leur manque de compréhension souligne le besoin de projets de rédaction dès les premiers niveaux. De plus, l'échec de bon nombre de nos élèves à établir une

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

preuve ou à rédiger des expositions soulève certaines questions au sujet de leur interprétation et de leur lecture et au sujet du développement de leurs techniques d'apprentissage. Souvent, les élèves ne lisent pas du tout le texte et arrivent à leur but en exécutant des problèmes de façon méthodique.

Activités s'attaquant aux problèmes

La plupart de mes projets d'exploration sont des résumés en classe ou des projets devant être réalisés le soir même. Ils visent à aider les élèves à assimiler un concept mathématique. Ils comprennent les types d'exercices suivants :

1. *Résumés.* Les résumés peuvent indiquer le niveau de la classe ou servir d'introduction à un concept.

   - Quelle est aujourd'hui votre notion d'une « fonction » ? Soyez aussi précis que possible, comme « $y = f(x)$ est une fonction de x si ... ».

   - Qu'est-ce qui cloche dans cette logique ?

     (Exemple d'un problème de réduction de fractions.)

   - Qu'est-ce qu'un « radian » et pourquoi cette notation est-elle préférée à celle des « degrés » ?

2. *Transposition d'une image visuelle.* Ces expériences intègrent une compréhension visuelle et verbale.

   - Décrivez le graphique de cette fonction comme si vous tentiez de l'expliquer à un ami au téléphone.

   - Quelle est la relation entre le graphique de $y = 1/x^2$ et celui de $y = x^2$? Comment peut-on prévoir le comportement du second à partir de celui du premier ?

   - Les élèves sont groupés par paires. Un élève décrit un graphique verbalement et aussi précisément que possible et l'autre trace ce graphique. Aucune aide n'est permise de l'un comme de l'autre.

3. *Synopsis des techniques de résolution de problèmes.* Ces exercices augmentent les connaissances des élèves en ce qui concerne les techniques de résolution de problèmes.

   - Décrivez comment on combine des fractions pour obtenir un terme. Vous ne pouvez donner simplement un exemple.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

- Quelle est la différence entre une combinaison et une permutation et quels indices vous permettent de faire la distinction entre ces deux types de problèmes ?

4. *Conception d'un algorithme.* Les élèves pratiquent la description des étapes du raisonnement algorithmique.

   - Écrivez une procédure détaillée permettant de résoudre des problèmes du type distance-temps-vitesse.

5. *Conception d'une définition ou énoncé d'un théorème.* Ce type d'exercice améliore la précision des termes et des théorèmes des élèves.

6. *Communication d'idées à un auditoire.* Ces exercices donnent aux élèves l'expérience de transposer une explication en une autre.

   - Bon nombre d'entre vous n'ont pas saisi le concept énoncé à la page 12 du texte. Récrivez cette page à votre façon.

   - Écrivez pour votre meilleur ami, en quelques pages, la matière enseignée dans ce cours, car il a pris du retard. Nommez les concepts importants, les définitions et les théorèmes, puis expliquez brièvement les méthodes pouvant faire l'objet de questions à l'examen.

7. *Création d'un problème.* Grâce à ces exercices, les élèves apprennent à créer leur propres situations.

   - Dans votre famille, vous avez trois sœurs, quatre frères, deux chiens et 17 chats. Créez plusieurs problèmes comportant des combinaisons et des permutations portant sur ces nombres. Donnez les réponses et identifiez ce qui vous a permis de déterminer les techniques à utiliser pour résoudre le problème.

8. *Généralisation d'un concept.* Ces exercices aident à renforcer la compréhension qu'ont les élèves de la vue d'ensemble des mathématiques.

   - Les mathématiciens écrivent des définitions lorsque le besoin s'en fait sentir. À partir de votre étude des polynômes, quelles définitions pouvez-vous rédiger pour simplifier le sujet ? Quelle serait l'utilité de vos définitions ?

   - Dans la vie de tous les jours, avez-vous déjà rencontré des « valeurs absolues » ?

9. *Projets de groupe.* Les projets de ce type augmentent la confiance des élèves de même que leur productivité. Ces activités leur permettent d'échanger des idées et de poursuivre plus avant le développement d'une idée. Étant donné que les élèves aiment travailler en équipe, il s'agit d'une bonne façon d'introduire les projets de rédaction.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

- Distribuez des transparents et des marqueurs et demandez à chaque équipe de tenter de rédiger un énoncé exact d'un théorème ou une explication d'une procédure. Affichez les résultats à l'aide du rétroprojecteur.

- Demandez aux équipes de deviner un théorème, comme dans cet exemple : « Un écureuil entre dans une boîte et en ressort. Pour entrer, il peut passer par deux portes et pour sortir, par trois; il peut donc entrer et sortir de la boîte de six façons différentes. Un important principe entre en jeu ici et cela n'a rien à voir avec les écureuils. Pouvez-vous l'énoncer de la façon la plus générale possible ? » Ou bien : « Maintenant que je vous ai présenté mes explications pour trouver visuellement les maximum et minimum, pouvez-vous expliquer comment la première dérivée peut indiquer l'endroit où se trouve un maximum ou un minimum relatif ? Si vous le pouvez, vous aurez énoncé le *test de la première dérivée* ».

Techniques et avantages des projets de rédaction

Bien entendu, le fait de donner des projets de rédaction ne produit pas miraculeusement un enseignement et un apprentissage efficaces; l'enseignant doit réagir aux rédactions des élèves. Il est conseillé d'aborder la rédaction comme faisant partie d'un processus menant à une réalisation future plutôt que comme un produit final. Cette approche modifie le point de vue en mettant l'accent non pas sur ce qui est erroné mais sur la façon d'être plus précis. Afin d'arriver à effectuer cette conversion, j'ai utilisé plusieurs techniques.

1. *Discussion.* J'inscris les résultats des élèves sur des transparents, puis je les affiche à l'aide du rétroprojecteur encourage la discussion et je fait part de mes propres réactions. En conformité avec les *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics, qui précise que les mathématiques doivent être considérées comme une forme de communication, tout est mis en place afin de comprendre les efforts de chaque élève. Toute tendance des élèves à tourner en dérision ou à se montrer timides disparaissent lorsqu'ils se rendent compte que je tente de comprendre leur raisonnement et de déterminer comment ils peuvent améliorer leurs définitions. Les efforts de chaque élève comprennent habituellement une partie digne d'intérêt et utile et, fait significatif, les réponses des élèves comportent les mêmes types d'erreurs. Les réactions d'autres élèves servent à expliquer ce qui était visé. En effet, la plupart d'entre nous ont constaté que les élèves font parfois preuve d'une mystérieuse habileté à interpréter les intentions du professeur à l'égard d'autres élèves.

2. *Évaluation par les pairs.* Les élèves peuvent s'échanger leurs copies et les évaluer selon des critères précis (pour un exemple de feuille, reportez-vous à la figure 2). Ce type d'évaluation donne aux élèves l'occasion de voir les copies d'un point de vue semblable à celui de l'enseignant.

3. *Révision.* Une fois le besoin de précision démontré à l'aide de l'évaluation par les pairs, on peut demander aux élèves de récrire leurs définitions. Souvent, l'exercice en entier est

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

répété une autre journée. Même si les élèves croient avoir compris un concept lorsque l'enseignant leur montre les corrections apportées à leur travail, la meilleure occasion d'apprentissage consiste à leur demander de reconstruire leurs réponses de façon correcte.

4. *Anticipation.* Souvent, les projets de rédaction produisent des discussions animées et peuvent servir à introduire un sujet. Le projet de définition d'un degré, par exemple, peut être suivi d'une discussion de l'utilité des radians.

Ces exercices sont courts et valent pleinement le temps nécessaire à leur réalisation. Ils permettent d'enseigner des stratégies pour maximiser la compréhension, de développer la confiance et d'améliorer également la participation et la collaboration en classe et en dehors de la classe. La plupart des élèves apprécient d'avoir la chance d'être entendus et compris. De leur point de vue, l'élégance du texte ou des présentations orales peut simplement s'avérer offusquant. Les élèves sont généralement ouverts à la discussion des projets de rédaction en classe et à la réalisation des travaux supplémentaires à la maison, car ils voient le résultat dans leur meilleure compréhension de la matière. Les élèves ont signalé qu'ils estiment pouvoir lire et retenir la matière plus facilement au fur et à mesure qu'ils s'habituent aux conventions mathématiques.

Lors des examens, la précision et la qualité sont bien sûr requises, mais les élèves développent cette qualité d'eux-mêmes à l'aide des expériences en classe. Les résultats des examens s'en trouvent souvent améliorés, car l'évaluation détaillée du travail d'un élève augmente son souci du détail.

J'ai constaté que je n'ai pas besoin de noter l'aspect grammatical ou l'aspect mécanique. Mon but consiste à me rapprocher du raisonnement des élèves et si je corrige constamment les fautes d'orthographe et de grammaire, les élèves sont portés à employer un vocabulaire plus restreint et à prendre moins de risques. En règle générale, dans les copies des élèves, la maîtrise de la grammaire et des processus est étroitement liée à leur habileté à utiliser la logique. La question est de savoir s'ils communiquent adéquatement avec moi et la note détaillée, lorsqu'elle est donnée, est basée sur ce critère et est déterminée rapidement.

Par-dessus tout, l'enseignant peut mettre l'accent sur le fait que la rédaction de définitions, de théorèmes et, plus tard, de preuves, représente une expérience agréable. La notion d'élégance dans notre langage mathématique peut et doit être partagée par nos élèves à tous les niveaux.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

FEUILLE DE DÉFINITION ET DE THÉORÈME

FEUILLE DE DÉFINITION NOM : _____

DÉFINITION :

5 - L'élève a fourni une définition complète, dans une notation et un vocabulaire clair et précis, en se servant d'un vocabulaire mathématique approprié et avec un minimum de redondance.

4 - Légers problèmes de clarté, de notation, de vocabulaire et de formulation.

3 - Le concept de base est clair (l'élève semble savoir ce qui doit être défini), mais l'élève fait preuve d'une confusion importante dans la notation ou le vocabulaire.

2 - Le concept de base est énoncé avec grande confusion, la notation ou le vocabulaire comportant des erreurs graves.

1 - La définition ne se rapporte pas au concept spécifié.

FEUILLE DE THÉORÈME NOM : _____

ÉNONCÉ :

5 - L'élève a fourni un théorème complet, avec une notation et un vocabulaire clairs et précis, une hypothèse et une conclusion complètes, en se servant d'un vocabulaire mathématique approprié et avec un minimum de redondance.

4 - Légers problèmes de clarté, de notation ou de vocabulaire; ou encore, l'hypothèse ou la conclusion ne sont pas entièrement complètes.

3 - Le concept de base du théorème est clair (l'élève semble comprendre le théorème), mais l'élève fait preuve d'une confusion ou d'erreurs importantes dans la notation ou le vocabulaire.

2 - Le concept de base du théorème démontre une grande confusion concernant l'hypothèse ou la conclusion, la notation ou le vocabulaire comportant des erreurs graves.

1 - La théorème ne se rapporte pas au concept spécifié.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

Bibliographie

Burton, Grace M, « Writing as a Way of Knowing in a Mathematics Education Class », *Arithmetic Teacher* N° 33, décembre 1985, pages 40 à 45.

Commission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, version préliminaire, Reston, VA, The Council, 1987.

Hillocks, George, Jr., « The Responses of College Freshmen to Three Modes of Instruction », *American Journal of Education*, N° 89, 1981, pages 373 à 395.

Johnson, Marvin L., « Writing in Mathematics Classes : A Valuable Tool for Learning », *Mathematics Teacher*, N° 76, février 1983, pages 117 à 119.

Watson, Margaret, « Writing Has a Place in a Mathematics Class », *Mathematics Teacher*, N° 73, octobre 1980, pages 518 et 519.

Reproduit, avec permission, de
Mathematics Teacher, décembre 1988,
National Council of Teachers of Mathematics.

ANNEXE D

LIGNES DIRECTRICES POUR UNE INTÉGRATION EFFICACE DES RESSOURCES

Il existe un nombre croissant de types de ressources qui viennent appuyer les objectifs du programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle. Comme c'est le cas pour toute ressource, les films et les vidéos doivent être choisis en tenant compte des objectifs du programme et des exigences des élèves. Tout au long du guide du maître, des titres de films et de vidéos sont fournis.

Les questions suivantes doivent être posées lors de la sélection de ressources à utiliser en classe.

- Correspond-elle aux objectifs du programme ?
- Répond-elle aux exigences des élèves et à leur style d'apprentissage ?
- Vient-elle approfondir ou enrichir le programme ?
- Le moment est-il approprié ?
- Ce type de ressource montre-t-il des idées abstraites ?
- Cette ressource convient-elle au programme et aux exigences d'enseignement et d'apprentissage ?
- Les objectifs éducationnels sont-ils clairs ?
- Quel type de préparation est requis ?
- De quelle façon l'enseignement et l'apprentissage sont-ils évalués ?
- Quel type de suivi est requis ?

Centres de ressources

Il existe 12 centres de ressources en Alberta qui possèdent des films et des vidéos correspondant au programme de mathématiques du secondaire deuxième cycle. Chaque centre publie son propre catalogue dans lequel figure la liste des ressources offertes. Ces centres fonctionnent selon le même principe qu'une bibliothèque en prêtant les ressources audiovisuelles pour une certaine période de temps. Pour plus d'informations, communiquez avec un centre de ressources.

(A) Centres de ressources régionaux

Zone 1
Zone One Regional Film Centre
P.O. Box 6536
10020 - 101 Street
Peace River (Alberta)
T8S 1S3
Téléphone : (403) 624-3187

Zone 2-3
Central Alberta Media Services
(CAMS)
2017 Brentwood Boulevard
Sherwood Park (Alberta)
T8A 0X2
Téléphone : (403) 464-5540 et 467-8896

Zone 4
Alberta Central Regional Educational Services
(ACRES)
County of Lacombe
Box 3220
5140 - 49 Street
Lacombe (Alberta)
T0C 1S0
Téléphone : (403) 782-5730

Zone 5
South Central Alberta Film Federation
(SCAFF)
Westmount School
Box 90
Wheatland Trail
Strathmore (Alberta)
T0J 3H0
Téléphone : (403) 934-5028

Zone 6
Southern Alberta Regional Film Centre
(SAFRC)
McNally School
P.O. Box 845
Lethbridge (Alberta)
T1J 3Z8
Téléphone : (403) 320-7807

(B) Centres de ressources en région urbaine

County of Strathcona
Learning Resource Service
2001 Sherwood Drive
Sherwood Park (Alberta)
T8A 3W7
Téléphone : (403) 464-8235

Red Deer Public School Board
4747 - 53 Street
Red Deer (Alberta)
T4N 2E6
Téléphone : (403) 343-1405

Calgary Separate School Board
Instructional Materials
6220 Lakeview Drive S.W.
Calgary (Alberta)
T3E 6T1
Téléphone : (403) 246-6663

Calgary Board of Education
Education Media
3610 - 9th Street S.E.
Calgary (Alberta)
T2G 3C5
Téléphone : (403) 294-8540

Edmonton Public School Board
Learning Resources Centre
Centre for Education
One Kingsway
Edmonton (Alberta)
T5H 3G9
Téléphone : (403) 429-8320

Medicine Hat School District
Instructional Materials Centre
601 First Avenue S.W.
Medicine Hat (Alberta)
T1A 4Y7
Téléphone : (403) 526-1323

Edmonton Catholic Schools
Curricular Resources
St. Anthony's Teacher Centre
10425 - 84 Avenue
Edmonton (Alberta)
T6E 2H3
Téléphone : (403) 439-7356

ANNEXE E

ALBERTA CONSUMER AND CORPORATE AFFAIRS

Calgary	301 Centre 70; 7015 Macleod Trail South Box 5880, Postal Station A Calgary (Alberta) T2H 2M9 297-5700
Edmonton	3rd Floor, Capilano Centre 9945 - 50 Street Edmonton (Alberta) T6A 0L4 427-5782
Fort McMurray	Fort McMurray Provincial Building 5th Floor, West Tower 9915 Franklin Avenue Fort McMurray (Alberta) T9H 2K4 743-7231
Grande Prairie	Grande Prairie Provincial Building 10320 - 99 Street, Box 7 Grande Prairie (Alberta) T8V 6J4
Lethbridge	300 Professional Building Bag Service 3014 740 - 4 Avenue South Lethbridge (Alberta) T1J 4C7 381-5360
Medicine Hat	303 Provincial Building 770 6 Street S.W. Medicine Hat (Alberta) T1J 4J6 529-3535
Peace River	Provincial Building 9621 - 96 Avenue Bag 900, Box 9 Peace River (Alberta) T0H 2X0 624-6214
Red Deer	2nd Floor, Provincial Building 4920 - 51 Street Red Deer (Alberta) T4N 6K8 340-5241
Alberta Consumer and Corporate Affairs	Box 1616 Edmonton (Alberta) T5J 2N9

ANNEXE F

CONSULTANTS EN MATHÉMATIQUES POUR ALBERTA EDUCATION

Bureau régional de Grande Prairie

Hugh Sanders
5th Floor, Nordic Court
10014 - 99 Street
Grande Prairie (Alberta) T8V 3N4
Téléphone : 538-5130
Télécopieur : 538-5135

Bureau régional d'Edmonton

Dick Daly
Devonian Building - West Tower
11160 Jasper Avenue
Edmonton (Alberta) T5K 0L2
Téléphone : 427-2952
Télécopieur : 422-9682

Art Peddicord
Devonian Building - West Tower
11160 Jasper Avenue
Edmonton (Alberta) T5K 0L2
Téléphone : 427-2952
Télécopieur : 422-9682

Bureau régional de Red Deer

Ron Babiuk
3rd Floor West, Provincial Building
4920 - 51 Street
Red Deer (Alberta) T4N 6K8
Téléphone : 340-5262
Télécopieur : 340-5305

Bureau régional de Calgary

Pat McLaughlin
Room 1200, Rocky Mountain Plaza
615 Macleod Trail, S.E.
Calgary (Alberta) T2G 4T8
Téléphone : 297-6353
Télécopieur : 297-3842

Bureau régional de Lethbridge

Gary Hill
Provincial Building
200 - 5th Avenue, South
Lethbridge (Alberta) T1J 4C7
Téléphone : 381-5243
Télécopieur : 381-5734